# הפיכות

תזכורת: מעכשיו עד שנגיד אחרת אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות (מגודל $n \times n$ עבור $n$ כלשהו, כלומר מס' השורות שווה למספר העמודות).

לכל $n$ יש מטריצה מיוחדת שנקראת "מטריצת היחידה"

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

למשל:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ל$I$ יש תכונה מיוחדת: היא נטרלית לכפל. כלומר, לכל מטריצה כך שהכפל מוגדר (לא בהכרח ריבועית)

$$IA = A$$

ואם הכפל מוגדר מהכיוון השני, אז:

$$AI = A$$

דוגמא:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

אם $A$ מטריצה ריבועית מאותו גודל של $I$, אז הכפל בינהם מוגדר משני הכיוונים, ואז:

$$IA = AI = A$$

אם נסתכל על אוסף המטריצות מגודל $n \times n$ עבור $n$ קבוע. אפשר להכפיל בו כל שתי מטריצות ונקבל מטריצה מגודל $n \times n$, והמטריצה $I_n$ נטרלית לכפל משני הכיוונים (כמו המספר $1$ בקבוצת המספרים).

הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נקראת "הפיכה" אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, כך ש:

$$AB = BA = I_n$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן $A$ הפיכה.
דוגמא נוספת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: לא כל מטריצה הפיכה.
דוגמא: נוכיח שאם במטריצה יש עמודת אפסים, אז המטריצה לא הפיכה.
הוכחה: תהי $A$ מטריצה שיש בה עמודת אפסים. נניח $C_j(A) = 0$. לכל מטריצה $B$

$$C_j(BA) = BC_j(A) = B0 = 0$$

כלומר, העמודה ה$j$ במטריצה $BA$ תמיד שווה לעמודת אפסים. לכן לא ייתכן ש$BA = I$.
הערה: גם מטריצה עם שורת אפסים, היא בהכרח לא הפיכה (הוכחה דומה).
הערה חשובה: העובדה שמטריצה לא הפיכה לא אומרת שיש בה אפסים! (יש מטריצות לא הפיכות שאין בהן בכלל את אפס בשום רכיב).
לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה. נראה בהמשך.
טענה: אם $A$ הפיכה, אז יש רק מטריצה אחת שהכפל שלהן בשני הכיוונים נותן $I$.
הוכחה: נניח שיש 2 מטריצות ש"הופכות" את $A$, נקרא להן $B, C$, ונוכיח שהן שוות.

$$C = IC = (BA)C = BAC = B(AC) = BI = B$$

מסקנה: אם $A$ הפיכה, ההופכית שלה יחידה, ואנחנו מסמנים אותה ב$A^{-1}$.
הערה: (בלי הוכחה) אם $A, B$ מטריצות ריבועיות (מאותו גודל), וחישבתם וגיליתם ש$AB = I$, אז גם $BA = I$.
מסקנה: בשביל להוכיח שמטריצה $B$ היא ההופכית של $A$, מספיק לבדוק שבאחד הכיוונים המכפלה יוצאת $I$.
טענה: אם $A, B$ מטריצות הפיכות, אז $AB$ גם הפיכה.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

הוכחה: בשביל להוכיח שההופכית של $AB$ היא $B^{-1}A^{-1}$ צריך להוכיח שהכפל בין שתיהן יוצא $I$. (מספיק לבדוק את אחד הכיוונים).

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

הכללה: אם $A_1, ..., A_n$ מטריצות הפיכות. אז $A_1 \cdots A_n$ גם הפיכה, ומתקיים:

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

טענה: נניח $A, B$ ש$A, B$ מטריצות ריבועיות מאותו גודל כך ש$AB$ מטריצה הפיכה. אז $A$ ו $B$ גם הפיכות.
הוכחה: נתון שהמטריצה $AB$ הפיכה. זה אומר שקיימת מטריצה $C$ כך ש:

$$(AB)C = I$$

$$C(AB) = I$$

נקבל ש:

$$A(BC) = I$$

ולכן $A$ הפיכה ($BC$ היא ההופכית שלה)

$$(CA)B = I$$

קיבלנו ש$B$ הפיכה (ההופכית שלה היא $CA$)
הכללה: אם יש לנו מטריצות ריבועיות $A_1, ..., A_n$. ואנחנו יודעים ש$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ היא מטריצה הפיכה, אז כל אחת מהמטריצות $A_1, ..., A_n$ גם הפיכה.
משפט: תהי $A$ מטריצה ריבועית. $A$ הפיכה אמ"ם הצורה הקנונית שלה שווה ל$I$.
דוגמאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

זאת הצורה הקנונית, והיא לא שווה ל-$I$. לכן $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ לא הפיכה.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

נדרג לצורה קנונית:

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-7R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אין צורך להמשיך לדרג. ברגע שהגענו לשורת אפסים, אנחנו יודעים שגם בצורה הקנונית תהיה שורת אפסים, ובפרט הצורה הקנונית לא שווה ל-$I$.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 0.5R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to -0.2R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

הצורה הקנונית שווה ל-$I$, לכן המטריצה הפיכה.
אם מטריצה הפיכה, איך מוצאים את ההופכית?
אלגוריתם:

$$A|I$$

נדרג את $A$ עד שנגיע ל-$I$ ($A$ הפיכה ולכן אנחנו יודעים שבסוף הדירוג נגיע ל-$I$).
כל פעולת דירוג שאנחנו עושים על $A$ אנחנו עושים במקביל גם על $I$.
כשנגיע ל-$I$ בסוף הדירוג של $A$, נקבל בצד ימין איזשהי מטריצה.

המטריצה הזאת שמתקבלת, היא ההופכית של $A$.

דוגמא: הוכחנו ש $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה. נחשב את ההופכית שלה.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1.5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0 & -0.2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0 & -0.2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.6 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0 & -0.2 \end{array}\right)$$

כלומר,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0.4 \\ -0.6 & 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

תרגיל: קבעו אם המטריצה הבאה הפיכה, במידה וכן, חשבו את ההופכית שלה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: $A$ הפיכה.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

הקשר בין הפיכות למערכות משוואות:

אם $A$ הפיכה, ונתונה המערכת

$$Ax = b$$

אז לא משנה מי זה הוקטור $b$, למערכת תמיד יהיה פתרון יחיד (אין מצב שאין פתרון, אין מצב שיש אינסוף פתרונות).

$$x = A^{-1}b$$

דוגמא: פתרו את המשוואה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

בגלל ש $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה, אנחנו יודעים שאפשר לפתור את המערכת ויש רק פתרון אחד.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כלומר, הפתרון של מערכת המשוואות $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$

הערה: אם נתונה מערכת $Ax = b$, כאשר $A$ ריבועית, ולמערכת יש פתרון יחיד, אז בהכרח $A$ הפיכה. הסיבה היא, כי אם יש פתרון יחיד, זה אומר שכשמדרגים את המערכת בכל עמודה יש איבר מוביל. כלומר, הצורה הקנונית חייבת להיות $I$.

הערה: למערכת $Ax = 0$ תמיד קיים פתרון. וקטור ה0. (אין מצב שלא יהיה פתרון בכלל). יכול להיות שיש עוד.

לפעמים יהיה אינסוף פתרונות ולפעמים יהיה פתרון יחיד.

יהיה פתרון יחיד אמ"ם $A$ הפיכה.

למערכת כזאת $Ax = 0$ קוראים "מערכת הומוגנית".

מסקנה: מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה אמ"ם הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית הוא וקטור ה0.