תרגיל בית 6

שאלה 1
היעזר במבחן דריכלה וענה על הסעיפים הבאים:
סעיף א
לאילו ערכי p האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$1.\ \int_1^\infty \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx \qquad 2.\ \int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \sin x}{x}dx \qquad 3.\ \int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x^p}dx \qquad 4.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$$

סעיף ב
הוכח שהאינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים:

$$1.\ \int_1^\infty \cos(x^2+1)dx \qquad 2.\ \int_1^\infty \frac{\cos^3 x}{x}dx$$

פתרון שאלה 1
סעיף א1
$f(x)=e^{\sin x}\sin 2x$; $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$.

לכל $p>0$ פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת ו $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

נבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה בשביל פונקציה $\boldsymbol{f(x)}$.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b e^{\sin x}\sin 2x dx\right| = \left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ \sin x = t\end{matrix}\right\} = 2\left|\int_a^{\sin b} e^t t dt\right| \le 2\int_a^1 e^t t dt < 2e = K$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

סעיף א2
$f(x)=\sin x$; $g(x)=\dfrac{(\ln x)^p}{x}$. נבדוק ש $g(x)$ מונוטונית יורדת. ו $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2}(p-\ln x)$$

$g'(x)<0$ לכל $x>e^p$, לכן פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת החל מ $x>e^p$.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ לפי כלל לופיטל.

סעיף א3

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x^p}dx = \left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ t=x^3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{p+2}{3}}}dt$$

נסמן $f(t)=\sin t$; $g(t)=\dfrac{1}{t^{\frac{p+2}{3}}}$.

$g(t)$ מונוטונית יורדת ו $\lim\limits_{x\to\infty} g(t)=0$ לכל $p>-2$.

לכן אינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.
סעיף א4
סעיף א

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\alpha} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\tan x|^{\alpha} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\alpha} dx$$

עבור $\alpha > 0$ הפונקציה $f(x) = |\tan x|^{\alpha}$ לא חסומה בסביבת הנקודות $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

נבדוק האם $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\tan x|^{\alpha} dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x) = |\tan x|^{\alpha}$ אי שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

נסמן $g(x) = \dfrac{1}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}$.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{|\sin x|^{\alpha} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}{|\cos x|^{\alpha}} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}{|\cos x|^{\alpha}} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}{\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|^{\alpha}} = 1.$$

הפונקציות $f(x), g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{1}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}} dx$ מתכנס עבור $0 < \alpha < 1$ ומתבדר כאשר $1 \le \alpha$.

באותו אופן ניתן להראות שהאינטגרל $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\alpha} dx$ מתכנס עבור $0 < \alpha < 1$ ומתבדר כאשר $1 \le \alpha$.

הפעם נשתמש ב $g(x) = \dfrac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}$.

עבור $\alpha < 0$ הפונקציה $f(x) = |\tan x|^{\alpha}$ לא חסומה בסביבת הנקודות 0.

נבדוק האם $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |\tan x|^{\alpha} dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x) = |\tan x|^{\alpha}$ אי שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

נסמן $g(x) = |x|^{\alpha}$.

$$\lim_{x \to 0^{-}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{|\sin x|^{\alpha}}{|\cos x|^{\alpha} |x|^{\alpha}} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{|x|^{-\alpha}}{|\sin x|^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0^{-}} = 1.$$

הפונקציות $f(x), g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |x|^{\alpha} dx$ מתכנס עבור $-1 < \alpha < 0$ ומתבדר כאשר $-1 \ge \alpha$.

באותו אופן ניתן להראות שהאינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$ מתכנס עבור $-1<\alpha<0$ ומתבדר כאשר $\alpha \le -1$

(נשתמש באותה פונקצית עזר).

נשים לב שעבור $\alpha = 0$ האינטגרל מתכנס.

סה"כ קיבלנו שהאינטגרל מתכנס עבור $-1<\alpha<1$.

מתבדר עבור $\alpha \le -1 \vee 1 \le \alpha$.

<u>סעיף ב1</u>

$$\int_1^\infty \cos(x^2+1)dx == \left\{ \begin{matrix} \textit{הצבה} \\ x^2+1=t \\ x=\sqrt{t-1} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t-1}}dt$$

נסמן $f(t)=\cos t$; $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t-1}}$.

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

<u>סעיף ב2</u>

נסמן $f(x)=\cos^3 x$; $g(x)=\frac{1}{x}$

$$\left|\int_0^x \cos^3 t dt\right| = \left|\int_0^x \left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)\right| = \left|\left(\sin t - \frac{\sin 3t}{3}\right)\Bigg|_0^x\right| \le \frac{4}{3}$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

<u>שאלה 2</u>

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

א. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}dx$ ב. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ ג. $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

ד. $\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ ה. $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נשים לב ש $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} > 0$ לכל $1 \le x$ ואז ניתן להשתמש במבחן המנה.

$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ מתכנס.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot x\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}}dx$ מתכנס.

<u>סעיף ב</u>

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx \; .$$

נשים לב ש $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{1}/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$. האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ הוא אמיתי, ולכן קיים וסופי.

נבדוק התכנסות האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. מספיק לבדוק האם האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx = [-x\ln x + x]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b\ln b - b\right] = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \; .$$

ז"א האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס.

$\frac{-\ln x}{1-x^2} > 0$ לכל $0 \le x \le \frac{1}{2}$ וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

לכל $0 \le x \le \frac{1}{2}$ מתקיים $\frac{-\ln x}{1-x^2} \le \frac{-4\ln x}{3}$. מכיוון ש $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס גם $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4\ln x}{3}dx$.

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס וסה"כ $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

<u>סעיף ג</u>

ברור ש $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, ולכן

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0$ החל מ x_0 מסוים. לכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \quad (x\to\infty)$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר, לכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ מתבדר.

<u>סעיף ד</u>

$$\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx \; .$$

נבדוק האם $\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס.

בקטע $0 \le x \le 1$ נקבל ש $\frac{\pi}{4} \le \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$ ואז $\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$ לכל $0 \le x \le 1$ וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

$\int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{x}}dx$ מתכנס. לכל $0 \le x \le 1$ $\frac{\pi}{2\sqrt{x}} < \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ ז"א גם $\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס.

נבדוק האם $\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס.

$0 < \arctan\frac{1}{x} \le \frac{\pi}{4}$ לכל $1 \le x$ ואז $\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$ וניתן להשתמש במבחן המנה.

$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ מתכנס. $\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1/x} = \frac{\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}$. נשתמש במשפט לופיטל ונקבל ש

$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2+1}}{-1/x^2} = 1$.

האינטגרל מתכנס.

<u>סעיף ה</u>

$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$. תחילה נשים לב שלכל $2 \le x$ מתקיים $0 \le \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}$.

ניתן להשתמש במבחן המנה. נשים לב תחילה ש $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \Leftarrow \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$.

$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר. $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} \cdot x\sin\frac{1}{x} = 1$ והאינטגרל שלנו מתבדר.

<u>שאלה 3</u>

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

א. $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ ב. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x}\sin(tgx)dx$

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נסמן $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2,\infty)$.

נסמן $g\left(x\right)=\sin x$.

$G\left(x\right)=\int\limits_2^x \sin t dt=\left[\cos t\right]_2^x=\cos x-\cos 2$ מכיוון שלכל x ממשי מתקיים $-1\le\cos x\le 1$ אז $G\left(x\right)$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל $\int\limits_2^\infty f\left(x\right)g\left(x\right)dx=\int\limits_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס.

נשאר לבדוק האם $\int\limits_2^\infty \frac{\left|\sin x\right|}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

מכיוון ש $\frac{\left|\sin x\right|}{\sqrt{x}-1}\ge 0$ ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

נשים לב ש $\sin^2 x\le\left|\sin x\right|$ ואז $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}\le\frac{\left|\sin x\right|}{\sqrt{x}-1}$. אם נוכיח ש $\int\limits_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר אז גם $\int\limits_2^\infty \frac{\left|\sin x\right|}{\sqrt{x}-1}dx$ והתשובה תהייה $\int\limits_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס בתנאי.

$\cos 2x=1-2\sin^2 x\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$.

$$\int\limits_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_2^\infty \frac{1-\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx-\frac{1}{2}\int\limits_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx.$$

נבדוק האם $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

נשים לב ש $\frac{1}{\sqrt{x}-1}\ge 0$ לכל $2\le x$. ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

$\frac{1}{\sqrt{x}-1}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ לכל $2\le x$ מכיוון ש $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר גם $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר.

נבדוק האם $\int\limits_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתכנס או מתבדר.

נסמן $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2,\infty)$.

נסמן $g\left(x\right)=\cos 2x$.

$G\left(x\right)=\int\limits_2^x \cos 2t dt=\left[-0.5\sin 2t\right]_2^x=-0.5\sin 2x+0.5\sin 4$ מכיוון שלכל x ממשי מתקיים $-1\le\sin 2x\le 1$ אז $G\left(x\right)$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל $\int\limits_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx=\int\limits_2^\infty f\left(x\right)g\left(x\right)dx$ מתכנס.

סה"כ קיבלנו ש $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר ו $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ ולכן

$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx - \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}dx$ מתבדר והאינטגרל בתרגיל מתכנס בתנאי.

<u>סעיף ב</u>

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x}\sin(tgx)dx = \left\{\begin{matrix} \text{הצבה} \\ tgx = t \\ x = arctgt \\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt \\ \frac{1}{\cos^2 x} = t^2+1 \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \sin t \cdot \frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

נסמן $f(t) = \sin t \quad ; \qquad g(t) = \frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}$

$g(t)$ מונוטונית יורדת ל – 0 כי $\lim_{t\to\infty} arctgt = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 0$.

$g(t)$ מונוטונית יורדת החל מ t_0 מסוים כי

$g'(t) = \dfrac{\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t^2} - arctgt\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1} = \dfrac{1-t\,arctgt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$ החל מ t_0 מסוים.

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס. התכנסות היא בתנאי כי $\int_0^\infty |\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt \sim \int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}dt$,

$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}dt$ מתבדר ולכן אינטגרל $\int_0^\infty |\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$ גם מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

<u>שאלה 4</u>

קבע לאילו ערכי p האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט ולאילו ערכי p האינטגרלים מתכנסים בתנאי:

א. $\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ ב. $\int_0^\infty \sin x\frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx + \int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$$

באינטגרל הראשון $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ נשתמש במבחן ההשוואה.

$(x\to 0)$ $\sin(x^2)\sim x^2$, לכן $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$

נחקור את האינטגרל השני $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$.

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx = \left\{\begin{matrix} \text{הצבה} \\ t = x^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{2}}}dt$$

האינטגרל השני בסכום $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט אם ורק אם $\frac{p+1}{2} > 1 \Leftrightarrow p > 1$.

האינטגרל השני בסכום $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס בתנאי אם ורק אם $0 < \frac{p+1}{2} \le 1 \Leftrightarrow -1 < p \le 1$.

<u>התשובה:</u> האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס

בהחלט אם ורק אם $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם $-1 \le p \le 1$

<u>סעיף ב</u>

$$\int_0^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx = \int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx + \int_1^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$$

באינטגרל $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ נשתמש במבחן ההשוואה.

$\sin x \sim \ln(x+1) \sim x \quad (x \to 0)$

לכן, $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$

לכן האינטגרל $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$.

נוכיח שהאינטגרל $\int_1^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ מתכנס לכל $p > 0$ לפי מבחן דיריכלה.

נסמן $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^p}$

$$g'(x) = \frac{\frac{x^p}{x+1} - px^{p-1}\ln(x+1)}{x^{2p}} = \frac{\frac{x}{x+1} - p\ln(x+1)}{x^{p+1}} < 0$$

החל מ - x_0 מסוים לכן $g(x)$ מונוטונית יורדת מ - x_0 מסוים.

נוכיח עכשיו שאינטגרל $\int_1^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט רק עבור $p > 1$.

אם $p \le 1$ אזי $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}dx$ מתבדר ואז גם $\int_1^\infty |\sin x| \frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ מתבדר לפי מבן ההשוואה.

<u>התשובה:</u>

האינטגרל $\int_0^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתכנס

בהחלט אם ורק אם $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם $0 < p \le 1$