הוכחות למשפטים לקראת המבחן בבדידה

סמסטר קיץ תשע"ב

דביר חדד

1) **צ"ל**: עבור קבוצה סופית A מתקיים: $|p(A)| = 2^{|A|}$

הוכחה: באינדוקציה.
נבדוק את נכונות הטענה עבור A=Ø. $|p(A)| = |\emptyset| = 1 = 2^0$
נניח את נכונות הטענה עבור n=k. אם $|A| = k$ אז $|p(A)| = 2^k$
נוכיח את נכונות הטענה עבור n=k+1. הגדלת הקבוצה עם איבר אחד יותר, ז"א :
$A_1 = A \cup \{b\}$ כאשר $b \notin A$. מכאן שגודל הקבוצה החדשה $|A \cup \{b\}| = k + 1$
$p(A) \subseteq p(A_1)$ ז"א כל איבר בקבוצה החזקה של A נמצא בקבוצת החזקה של A_1. האיברים היחידים שנמצאים בקבוצה החזקה של A_1 הם אלו הכוללים את b בתוכם. בעצם לוקחים כל תת קבוצה של A, שכבר נמצאת בp(A) ומוסיפים אליה את האיבר b. ישנם 2^k תתי קבוצות לA. לA_1, יש את אלו שבנינו בעזרת הb, וגם את אלו של A. לכן :
$|p(A)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. מ.ש.ל.

2) **צ"ל**: אם R יחס שקילות על A , אזי $\left\{[a]_R \,\middle|\, a \in A\right\}$ חלוקה של A.

הוכחה: כדי להראות שהקבוצה היא חלוקה של A צריך להראות שהחיתוך של כל שני איברים בה הוא הקבוצה הריקה, וגם שהאיחוד הכללי נותן את A עצמה. נתחיל עם התנאי הראשון: נניח בשלילה ש$[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ כאשר $[a]_R \neq [b]_R$. מכאן שקיים x כך שמתקיים:
$x \in [a]_R \wedge x \in [b]_R$. ע"פ הגדרת מחלקת השקילות $(a,x) \in R \wedge (b,x) \in R$. מאחר ו$R$ סימטרי, $(x,b) \in R$. ובגלל שR טרנזיטיבי, נקבל ש$(a,b) \in R$. יהי $y \in [b]_R$ מכאן ש $(b,y) \in R$ ובגלל שR טרנזיטיבי נקבל ש$(a,y) \in R$, וע"פ הגדרת מחלקת השקילות $y \in [a]_R$.
והראנו ש$[b]_R \subseteq [a]_R$. ובאופן דומה ניתן להראות הכלה בכיוון השני. נקבל שיווין בסתירה להנחה.
נותר להראות כי האיחוד הכללי הוא A כולו. $\bigcup_{A \in A}[a]_R = A$. נראה זאת ע"י הכלה דו כיוונית.
$\Leftarrow$: יהי $x \in A$ מכאן ש$(x,x) \in R$, וע"פ הגדרת מחלקת השקילות $x \in [x]_R$. מכאן ש$x \in \bigcup_{a \in A}[a]_R$. והראנו הכלה בכיוון אחד; $A \subseteq \bigcup_{a \in A}[a]_R$. $\Longrightarrow$: יהי $x \in \bigcup_{a \in A}[a]_R$, לכן קיימת קבוצה $[a]_R$ כך ש $x \in [a]_R$, לכן $(a,x) \in R \subseteq A \times A$ ולכן $(a,x) \in A \times A$. וע"פ הגדרת המכפלה הקרטזית $x \in A$. מכאן ש$\bigcup_{a \in A}[a]_R \supseteq A$. והראנו הכלה דו כיוונית מכאן מתקבל השוויון $\bigcup_{A \in A}[a]_R = A$.
לסיכום, בדקנו אם משפחת הקבוצות מקיימת את התנאים להוות חלוקה לA, הוכחנו וניתן להסיק כי $\left\{[a]_R \,\middle|\, a \in A\right\}$ חלוקה של A. מ.ש.ל.

3) **צ"ל**: היחס המושרה ע"י החלוקה הוא יחס שקילות

הוכחה: תהי $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A. נסמן את היחס המושרה ע"י החלוקה בR, והוא מוגדר להיות $R = \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$. נבדוק את שלושת התנאים של יחס שקילות: טרנזיטיביות, סימטריות ורפלקסיביות. <u>רפלקסיביות</u>: לכל $a \in A$ קיים $i \in I$ כך ש $a \in A_i$ כי $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A. לכן $(a,a) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$ וע"פ הגדרת היחס המושרה $(a,a) \in R$. <u>סימטריות</u>: יהי $(a,b) \in R$, מכאן שקיים $i \in I$ כך ש $(a,b) \in A_i \times A_i$ ולכן $a,b \in A_i$. מכאן נובע כי $(b,a) \in A_i \times A_i$ ולכן $(b,a) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$, וע"פ הגדרת היחס המושרה $(b,a) \in R$. טרנזיטיביות: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$. צריך להוכיח כי $(a,c) \in R$. אבל ידוע כי קיים $i \in I$ כך ש$(a,b) \in A_i \times A_i$ ובגלל שמדובר בחלוקה, והחיתוך בין שני איברים שלה הוא ריק, נקבל שגם $(b,c) \in A_i \times A_i$. $A_i \times A_i$ הוא היחס המלא על A_i ולכן הוא טרנזיטיבי, ולכן $(a,c) \in A_i \times A_i$ וע"פ הגדרת האיחוד הכללי $(a,c) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$ וע"פ הגדרת היחס המושרה ע"י חלוקה נקבל כי $(a,c) \in R$ וזה בדיוק הדרוש. מ.ש.ל.

4) **צ"ל**: **(א)** בקבוצה סדורה חלקית אם קיים איבר קטן ביותר הוא יחיד.
(ב) ביחס סדר מלא איבר הוא מינימאלי אם ורק אם הוא קטן ביותר.

הוכחה:
(א) תהי A קבוצה סדורה חלקית. נניח שa איבר קטן ביותר בA. נניח בשלילה כי אין הוא יחיד, לכן קיים b∈ A כך שגם b איבר קטן ביותר. ע"פ הגדרת האיבר הקטן ביותר, לכל$c \in A$ מתקיים $a \le c$. בפרט זה נכון עבור b, לכן $a \le b$. אותו דבר נכון עבור b, ולכן $b \le a$
אבל בגלל שמדובר בקבוצה סדורה חלקית, היחס סדר הוא חלקי ומקיים אנטיסימטריות, ולכן $a = b$, וקיבלנו בהכרח שאם יש איבר קטן ביותר הוא יחיד.
(ב) יהי R יחס סדר מלא על A. $\Leftarrow$: יהי a איבר מינימאלי בA. ז"א שלא קיים $b \in A$ כך ש b ≤ a. ידוע כי היחס הוא מלא, ומאחר ויחס סדר מלא הוא בפרט יחס משווה, בהכרח מתקיים כי לכל $b \in A$ מתקיים $a \le b$. וזוהי בדיוק הגדרת האיבר הקטן ביותר.
$\Rightarrow$: יהי a איבר קטן ביותר בA. ע"פ הגדרת האיבר הקטן ביותר לכל $b \in A$ מתקיים $a \le b$. מאחר והיחס הוא ומלא ובפרט משווה, מתקבל כי לא יכול להיות איבר שמקיים $c \le a$, זה יסתור את הגדרת האיבר הקטן ביותר, ומאחר ולא קיים איבר קטן מa, הוא גם האיבר המינימאלי. מ.ש.ל.

5) **צ"ל**: **(א)** אם f,g פונקציות חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע.
(ב) אם f,g פונקציות על, אז $f \circ g$ על.

הוכחה:
(א) יהיו f,g פונקציות חח"ע. נניח בשלילה כי $f \circ g$ לא חח"ע. ז"א שקיימים a,b שונים כך ש $f \circ g(a) = f \circ g(b)$. $f(g(a))=f(g(b))$, ידוע כי g חח"ע, לכן $g(a) \neq g(b)$, ומאחר וf חח"ע, אם נסמן את $g(a)=c$ ואת $g(b)=d$ נקבל כי $f(d) \neq f(c)$ מאחר וf חח"ע.

ז"א $f\left(g(b)\right)\neq f(g(a))$, $f\circ g\ (a)\neq f\circ g\ (b)$, בסתירה להנחה. מכאן ש $f\circ g$ חח"ע.

(ב) יהיו f,g פונקציות על. נגדיר את g כ$g\colon A\rightarrow B$ ואת f כך $f\colon B\rightarrow C$. ידוע שלכל איבר בC קיים מקור בB מאחר וf על. וגם כן ידוע שלכן איבר בB קיים מקור בA כי g על. ומכאן שהפונקציה על כי לכל תמונה (איבר בC) קיים מקור (איבר שנשלח אליה מA). מ.ש.ל.

6) **צ"ל**: קבוצה חלקית לבת מניה היא בת מניה

הוכחה: אם הקבוצה החלקית היא סופית, ברור שהיא בת מניה ע"פ הגדרת קבוצה בת מניה. נניח וB תת קבוצה של $\mathbb{N}$ והיא אינסופית. נראה כי קיימת פונקציה $f{:}B\longrightarrow\mathbb{N}$ חח"ע ועל, ואז נקבל שהעוצמות שלהם שוות ולכן גם B בת מניה. נגדיר את הפונקציה f כך:

$f(x)=\left|\left\{y\in B\ \middle|\ y\leq x\right\}\right|$ נותר להראות כי זוהי פונקציה חח"ע ועל. נתחיל עם החח"ע: נניח ש$a,b\in B$ כך ש$f(a)=f(b)$ ז"א $\left|\left\{y\in B\ \middle|\ y\leq b\right\}\right|=\left|\left\{y\in B\ \middle|\ y\leq a\right\}\right|$

נניח בשלילה כי $a\neq b$ ובלי הגבלת הכלליות כי $a<b$. ולכן $\left|\left\{y\in B\ \middle|\ y\leq a\right\}\right|\ b\notin$, ונקבל כי הקבוצות שונות, בסתירה להנחה. מכאן שבהכרח $a=b$. הוכחנו חח"ע.

נוכיח על: באינדוקציה. ידוע כי B אינסופית ולכן שונה היא מקבוצה ריקה. ז"א יש לה איבר ראשון שנסמנו בa_0 כך ש $f(a_0)=1$ כי רק הוא עצמו נמצא בקבוצה. נניח כי הטענה נכונה עבור n, ונראה שהיא נכונה עבור $n+1$. נניח כי $f(a)=n$, זוהי קבוצה סופית, נניח שb קבוצת האיברים שגדולים מa, ונסמן את b_0 כאיבר הקטן ביותר שם. $f(b_0)=n+1$, וכן הלאה.

מכאן שf חח"ע ועל, ולכן כל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה. מ.ש.ל

7) **צ"ל** : הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן מניה או הקטע או הקטע החצי פתוח $(0,1]$ אינו בן מניה

הוכחה: נראה כי A בתור תת קבוצה של $(0,1)$ כך שכל מספר בA הם המספרים העשרוניים כך שלא מופיע 0 או 9 אחרי הנקודה העשרונית.(בחרנו את A כך כדי שלכל מספר תהיה הצגה יחידה, אחרת קיים שיוויון בין המספרים 0.3000 ו0.2999999) נראה כי היא איננה בת מניה, ולפי משפט קודם שהוכחנו תת קבוצה של קבוצה אינסופית היא בת מניה אם הקבוצה המקורית היא בת מניה. אם A איננה בת מניה, בהכרח ש$(0,1)$ גם כן איננו בן מניה. תהי $f\colon\mathbb{N}\longrightarrow A$ נראה כי f לא יכולה להיות על. $f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}..$,

$f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}..$ ... נסמן את האיבר b_n כך: $b_n=\begin{cases}1 & a_{nn}\neq 1\\ 2 & a_{nn}=1\end{cases}$ ונראה כי לא קיים למספר $0.b_1b_2b_3b_4\ \ldots$ מקור. נניח בשלילה שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך $f(n)=0.b_1b_2b_3b_4\ldots$. מכיוון שלכל איבר ב$A$ יש הצגה עשרונית יחידה ומכיוון ש$b_n\neq a_{nn}$ נקבל סתירה. מכאן שהקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן מניה. בגלל שמדובר במשפט מסוג A או B, הוכחנו את A ולכן המשפט A או B תמיד יהיה אמת, לא משנה מה קורה בB. מ.ש.ל.

8) **צ"ל**: אם לכל $n\in\mathbb{N}$ A_n בת מניה אז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ קבוצה בת מניה.

הוכחה: נתון כי לכל $n \in \mathbb{N}$ A_n בת מניה, ז"א שאם A_n אינסופית קיימת פונקציה $f_n: \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ חח"ע ועל ואם A_n קבוצה סופית נקבל כי $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. עבור הקבוצה הסופית נגדיר $f_n: \mathbb{N} \longrightarrow A_n$, $f_n(x) = \begin{cases} a_x & 1 \le x \le k \\ a_1 & k < x \end{cases}$ זוהי פונקציה על. נגדיר כעת פונקציה $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ע"י $g(n_1, n_2) = f_{n_1}(n_2)$, וזוהי פונקציה על כי לכל תמונה קיים מקור (טעון הוכחה קצרה). לכן $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \le \left|\mathbb{N} \times \mathbb{N}\right|$, וידוע מהאלכסון של קנטור כי $\left|\mathbb{N} \times \mathbb{N}\right| = \aleph_0$, ולכן הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ בת מניה. מ.ש.ל.

9) **צ"ל**: משפט קנטור $|A| \neq |p(A)|$.

הוכחה: נוכיח כי לא קיימת פונקציה על מA לp(A) ולכן העוצמות שלהם שונות. תהי f פונקציה $f: A \longrightarrow p(A)$, נקבל כי לכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \subseteq A$. קיימות שתי אופציות, או ש$a \in$ $f(a)$ או ש$a \notin f(a)$. נגדיר קבוצה B כך ש $B = \left\{a \in A \middle| a \notin f(a)\right\}$. B הוא איבר בp(A), נניח בשלילה שקיים לו מקור $b \in A$ כך ש f(b)=B. אם $b \in B$ נקבל לפי הגדרת B ש$b \notin f(b)$. וזוהי סתירה כי b לא יכול להיות גם שייך וגם לא שייך לB. אם $b \notin B$ נקבל ש$b \notin f(b)$ ולכן הוא שייך לB , בסתירה. קיבלנו פונקציה שאינה על, לכן העוצמות שונות. מ.ש.ל.

10) **צ"ל** : משפט קנטור ברנשטיין. ז"א, אם a,b עוצמות כך ש$a \le b, b \le a$ מתקיים ש $a = b$.

11) **צ"ל**: הגדרת העוצמה של קבוצת הפונקציות מA לB מוגדרת היטב. (נסמן $|B^A| = |B|^{|A|}$)

הוכחה: ז"א צריך להוכיח שאם $|A| = |C|, |B| = |D|$ אז $|B^A| = |D^C|$. אם מדובר בקבוצות סופיות, אזי A מגודל m וB מגודל n, לכן קיימות בסה"כ n^m $(= |B^A|)$ פונקציות.
בקבוצות אינסופיות, צ"ל שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f:|B^A| \longrightarrow |D^C|$.
ידוע כי $|A| = |C|, |B| = |D|$, לכן קיימות פונקציות $g: A \longrightarrow C, h: B \longrightarrow d$ חח"ע ועל. נגדיר את f כך ש$f(t) = h \circ t \circ g^{-1}$. נוכיח כי f חח"ע ועל. חח"ע: ניקח a,b כך שf(a)=f(b) ונראה שבהכרח a=b. f(a)=f(b) לכן $h \circ a \circ g^{-1} = h \circ b \circ g^{-1}$
לכן $h \circ a \circ g^{-1} \circ g = h \circ b \circ g^{-1} \circ g$ לכן $h \circ a = h \circ b$ ובגלל שh חח"ע ועל קיימת לה הפיכה, $h^{-1} \circ h \circ a = h^{-1} \circ h \circ b$ ומכאן ש a=b. הראנו חח"ע. כעת נראה כי הפונקציה על: יהי $d \in D^C$ ז"א $d: C \longrightarrow D$, צ"ל שקיים לה מקור. נראה כי $f(h^{-1} \circ d \circ g) = d$ ע"פ הגדרת f נקבל כי: $h \circ h^{-1} \circ d \circ g \circ g^{-1} = d$, ומאחר והרכבת פונקציות אסוציאטיבית, נקבל את הדרוש. מ.ש.ל.

12) **צ"ל**: $\aleph = 2^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0}$

הוכחה: נראה קודם כי ${\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ע"י מציאת שתי פונקציות חח"ע. $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ואת הפונקציה $g: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. את g נגדיר ע"י $f(t) = t$. ברור שזוהי פונקציה חח"ע, הרי זוהי פונקצית היחידה. וזה חוקי כי $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. נגדיר את f באופן הבא כדי שגם היא תהיה חח"ע.

$a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, היא הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ כאשר $a_i \in \mathbb{N}$ לכל $i \in \mathbb{N}$. עבור הסדרה הנ"ל נגדיר סדרה חדשה: $\overbrace{1,1,\ldots,1}^{a_1+1}, 0, \overbrace{1,1,\ldots,1}^{a_2+1}, 0, \overbrace{1,1,\ldots,1}^{a_3+1}, \ldots$. נראה כי זוהי פונקציה חח"ע. נניח $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש $a \neq b$ ז"א קיימת תת קבוצה של הטבעיים שנסמנה בI ששונה מקבוצה ריקה כך שלכל $i \in I$ מתקיים$a_i \neq b_i$. בגלל שI תת קבוצה של הטבעיים, קיים לה איבר קטן ביותר, ונסמנו בj.
נניח בלי הגבלת הכלליות ש $a_j < b_j$. במקום ה$\sum_{i=1}^{j} \mathrm{a_i} + 2\mathrm{n}$ שווה לאפס בסדרה a ול1 בסדרה b.
הראנו כי הפונקציה חח"ע, ועל פי משפט קנטור ברנשטיין נקבל ש${\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

נותר להראות כי $א = 2^{\aleph_0}$. ידוע כי $|(0,1)| = א$. נראה כי קיימת פונקציה חח"ע $f: (0,1) \to \mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{N}}$ ונגדיר את f כך שאם $a \in (0,1)$ (ללא המספרים עם זנב אינסופי שכולו 9) ז"א ש= a $0.a_1a_2a_3 \ldots$ כאשר לכל i מתקיים $0 \leq a_i \leq 9$. נגדיר את הפונקציה f(a)=g כאשר $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{10}$ מוגדרת ע"י g(i)=a_i , נותר להוכיח שf חח"ע. יהי a,b∈ (0,1) כך ש a≠ b ז"א קיים i כך ש $s = a_i \neq b_i = t$ f(a) היא פונקציה שעבורה $g_a(i) = s$ ו$f(b)$ היא פונקציה שעבורה $g_b(i) = t$ מכיוון ש $g_b(i) \neq g_a(i)$, $f(b)$ ≠f(a).

תהיי $f: z_{10}^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ המוגדרת ע"י $f(g) = 0.g(1)0g(2)0g(3)0g(4)0\ldots$. נוכיח ש f חח"ע.
נניח ש $g_1, g_2 \in z_{10}^{\mathbb{N}}$ כך ש $g_1 \neq g_2$ ז"א קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש $g_1(i) \neq g_2(i)$ מכיוון שבין כל שני מספרים בהצגה העשרונית יש אפס לא ייתכן שנקבל זנב אינסופי של 9 ז"א יש הצגה עשרונית יחידה ל $f(g_1), f(g_2)$ והספרה שבמקום ה $2i-1$ שונה עבור שני המספרים ולכן $f(g_1) \neq f(g_2)$.

ידוע כי $2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0}$ כי ניתן לבנות את פונקציית היחידה בינהם, וברור שהיא על. נסיק את הזהות הבאה: $א = 10^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq א$ ולפי קנטור ברנשטיין נקבל בדיוק ש:

$$א = 2^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0}$$

מ.ש.ל.

13) **צ"ל**: לכל קבוצה A מתקיים$|p(A)| = 2^{|A|}$
הוכחה: נראה כי קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: p(A) \to \{0,1\}^A$ ונגדיר: $f(B) = \chi_B$ כאשר χ_B היא הפונקציה האופיינית. שולח לאפס את כל המספרים שלא נמצאים בB ולאחד את אלה הנמצאים בB. מאחר וB תת קבוצה של A, נקבל כי $\chi_B \in \{0,1\}^A$. נוכיח כי הפונקציה חח"ע ועל: חח"ע: יהי a,b תתי קבוצות של A, נראה ש f(a)=f(b) גורר a=b. $\chi_a = \chi_b$, ז"א שכל איבר בA שנשלח ל1 ע"י χ_b נשלח גם ע"י χ_a. האיברים שנשלחים לאחד הם בדיוק האיברים בb, וגם האיברים בa, ומאחר ואלו הם אותם איברים, a=b. כעת נראה כי הפונקציה על: יהי $t \in \{0,1\}^A$, לכן$t: A \to \{0,1\}$, מכאן שכל איבר בA נשלח או ל0 או ל1. נסמן בB את כל האיברים מA שנשלחים ע"י t ל1. $B = \left\{ a \in A \middle| t(a) = 1 \right\}$, ז"א שt זה בדיוק$\chi_B$, (ע"פ הגדרת הפונקציה האופיינית) ושB הוא המקור של t. מ.ש.ל.

14) **צ"ל**: אם k_1, k_2, k_2 עוצמות, אז $(k_1 \cdot k_2)^{k_3} = {k_1}^{k_3} \cdot {k_2}^{k_3}$

הוכחה:
יהיו A_1, A_2, A_3 קבוצות כך ש $|A_1| = k_1, |A_2| = k_2, |A_3| = k_3$.

נגדיר פונקציה $g : (A_1 \times A_2)^{A_3} \to {A_1}^{A_3} \times {A_2}^{A_3}$.

עבור $f \in (A_1 \times A_2)^{A_3}$ ז"א $f : A_3 \to A_1 \times A_2$ פונקציה ז"א לכל $x \in A_3$ $f(x) = (x_1, x_2)$ כאשר $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$ נתאים (f_1, f_2) כאשר לכל $x \in A_3$ מתקיים $f_1(x) = x_1 \wedge f_2(x) = x_2$ ז"א $g(f) = (f_1, f_2)$.

הפונקציה חח"ע

נניח ש $h_1, h_2 \in (A_1 \times A_2)^{A_3}$ כך ש $g(h_1) = g(h_2)$ ז"א

$(h_{11}, h_{12}) = (h_{21}, h_{22}) \Leftarrow h_{11} = h_{21} \wedge h_{12} = h_{22}$ ז"א לכל $x \in A_3$ מתקיים

$h_{11}(x) = h_{21}(x) = x_1 \wedge h_{12}(x) = h_{22}(x) = x_2$ ולכן לכל $x \in A_3$ מתקיים

$h_1(x) = (x_1, x_2) = h_2(x)$ כלומר $h_1 = h_2$ כדרוש.

הפונקציה על

נניח ש $h \in {A_1}^{A_3} \times {A_2}^{A_3}$ ז"א $h = (f_1, f_2)$ כאשר $f_1 : A_3 \to A_1 \wedge f_2 : A_3 \to A_2$. נגדיר פונקציה $f : A_3 \to A_1 \times A_2$ כך שלכל $x \in A_3$ $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ ואז $g(f) = h$.

מ.ש.ל.