פתרון תרגיל 2

1) א.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\dots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

שימו לב שהוספנו מחובר אפס $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)=0$.

נגדיר $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$ רציפה, ולכן אינטגרבילית שם. נבחר חלוקה שווה, נקבל $\Delta x_i=\frac{\pi}{n}$ ו- $\alpha_i=\frac{i\pi}{n}$ לפי סכום רימן כמוסבר נקבל לפי הגדרת האינטגרל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_0^{\pi}=\boxed{2}$$

ב.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}$$

נגדיר $f(x)=\sqrt[3]{x}$ רציפה בקטע $[0,1]$ נבחר חלוקה שווה $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ ו- $\alpha_i=\frac{i}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{x^{1\frac{1}{3}}}{1\frac{1}{3}}\Big|_0^1=\boxed{\frac{3}{4}}$$

ג.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x)=x^2$ רציפה בקטע $[0,1]$ לכן אינטגרבילית שם.

זהו סכום רימן עבור החלוקה T_n הנורמלית, כך ש- $\Delta x_j = \frac{1}{n}$ לכל j ו α_j הן נקודות הקצה הימניות.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+2^k+\dots+n^k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m}{n}\right)^k$$

נסמן $f(x)=x^k$ רציפה בקטע $[0,1]$ לכן אינטגרבילית שם. נבחר חלוקה שווה, $\Delta x_j = \frac{1}{n}$ ו $\alpha_j = \frac{j}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^k = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{k+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

נסמן $f(x)=\ln(1+x)$ בקטע $[0,1]$ סכום רימן
שם. נבחר חלוקה שווה $\Delta x_j=\frac{1}{n}$
ו- $\alpha_j=\frac{j}{n}$ נק' בקצה ימני.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{j}{n}\right)=\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$=\left\{\begin{array}{l|l} f=\ln(1+x) & f'=\frac{1}{1+x} \\ g'=1 & g=x \end{array}\right\}=$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,dx=$$

$$=\ln 2-\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}\,dx=\ln 2-\int_0^1 1\,dx+\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

$$=\ln 2-x\Big|_0^1+\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-1+\ln 2$$

$$=\boxed{2\ln 2-1}$$

2) א) הוכחנו:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)\le\ln 2\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{7.5}\right)$$

נסמן $f(x)=\frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$
רציפה בקטע לכן אינטגרבילית שם.
נסתכל על החלוקה
$T: 0<0.25<0.5<0.75<1$

נחשב $\bar{S}(T)$ ו- $\underline{S}(T)$.

F מונוטונית יורדת לכן $\inf F$ מתקבל בקצה ימני ו- $\sup$ בקצה שמאלי.

לכן,

$$\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\inf_{x\in I_k} f(x)\cdot \Delta x_k=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{S}(T)=\sum_{k=1}^{4}\sup_{x\in I_k} f(x)\,\Delta x_k=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}\right)$$

מתקיים

$$\underline{S}(T)\leq\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\leq\bar{S}(T)$$

$$\underline{S}(T)\leq \ln|1+x|\Big|_0^1\leq\bar{S}(T)$$

$$\underline{S}(T)\leq\ln 2\leq\bar{S}(T)$$

2.) ב.) הוכחנו:

$$\left(\frac{1}{1+(0.25)^2}+\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+(0.75)^2}+\frac{1}{2}\right)\pi\leq\left(1+\frac{1}{1+(0.25)^2}+\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+(0.75)^2}\right)$$

הוכחה: נסתכל על החלוקה

של $T: 0<0.25<0.5<0.75<1$

בקטע $[0,1]$.

נגדיר

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בקטע $[0,1]$.

נזכיר כי f רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית שם.

לפי משפט

$$\underline{S}(T) \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \overline{S}(T)$$

נחשב את סכומי דרבו,

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{4} \inf_{x\in I_k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Delta x_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(0.25)^2} + \frac{1}{1+(0.5)^2} + \frac{1}{1+(0.75)^2} + \frac{1}{2}\right.$$

הפונק מונוטונית יורדת לכן ה-inf בכל תת קטע מתקבל בקצה ימני שלו.

$$\overline{S}(T) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+(0.25)^2}+\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+(0.75)^2}\right)$$

sup מתקבל בקצה שמאלי.

בנוסף,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

לכן

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(0.25)^2}+\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+(0.75)^2}+\frac{1}{2}\right) \le \frac{\pi}{4} \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+(0.25)^2}+\frac{1}{1+(0.5)^2}+\frac{1}{1+(0.75)^2}\right.$$

וקיבלנו את הנדרש.

3) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \ln n \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

הוכחה:

עבור $n=1$ כל הביטויים מתאפסים לכן טריוויאלי. נניח ש- $n>1$.

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה בקטע $[1,n]$ ולכן אינטגרבילית שם. נתבונן בחלוקה T של הקטע הנתון שבה $x_j=1+j$ $(j=0,1,\dots,n-1)$ ו- $\Delta x_j=1$ עבור כל תת קטע. מכיוון ש- $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע, סכומי דרבו של החלוקה מתקבלים עבור בחירת נקודות הקצה:

$$\underline{S}(T)=\sum_{j=1}^{n-1}\Delta x_j\, f(x_j)=\sum_{j=1}^{n-1}1\cdot\frac{1}{j+1}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\overline{S}(T)=\sum_{j=1}^{n-1}\Delta x_j\, f(x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n-1}1\cdot\frac{1}{1+(j-1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

כעת, לפי משפט

$$\underline{S}(T)\le\int_1^n f(x)\,dx\le\overline{S}(T)$$

נחשב,

$$\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|\Big|_1^n=\ln n$$

ובסה"כ נקבל,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\ln n\le\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$