

תרגיל 8 בדידה להנדסה

1. יהי R יחס על הקבוצה \mathbb{N} כך שלכל $x, y \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$xRy \iff \exists m, n \in \mathbb{N}, x^m = y^n$$

הוכיחו כי R הוא יחס שקילות. רשמו במפורש את מחלקות השקילות של 1, של 2 ושל 49.

2. תהי A קבוצה ותהיינה A_1, A_2, \dots, A_n תת קבוצות שלה. נגדיר יחס R על A כך:

$$(x, y) \in R \iff \exists i, 1 \leq i \leq n : (x \in A_i) \wedge (y \in A_i)$$

כלומר, קיימת קבוצה מבין תתי הקבוצות הללו כך שגם x וגם y נמצאים בה. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ אז R רפלקסיבי.

(ב) אם R רפלקסיבי אז $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

(ג) אם לכל $i < j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$ אז R רפלקסיבי.

(ד) אם R טרנזיטיבי, אז לכל $i < j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$.

3. תהי A קבוצה. נאמר שקבוצה $\{A_1, A_2, \dots\}$ של תתי קבוצות של A היא חלוקה של A , אם הוא מקיים:

$$\bigcup A_i = A \quad (\text{א})$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, j > i \quad (\text{ב})$$

יהי R יחס שקילות על הקבוצה A . הוכיחו שקבוצת מחלקות השקילות (שקראנו לה קבוצת המנה) היא חלוקה של A .