

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132, 89-132)

תשע"ט, מועד א'

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.
מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.
מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 (21 נקודות)

א. (7 נק') תהי f פונקציה רציפה ב- x_0 , g פונקציה שאיננה רציפה ב- x_0 . הוכיחו או הפריכו: $f + g$ איננה רציפה ב- x_0 .

ב. (7 נק') יהיו $a \approx a'$, $b \approx b'$ מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו: $ab \approx a'b'$.

ג. (7 נק') יהיו ϵ, δ מספרים אינפיניטסימליים חיוביים. הוכיחו או הפריכו: ϵ^δ מספר אינפיניטסימלי חיובי.

שאלה 2 (22 נקודות)

$$f(x) = \begin{cases} 6\ln(e^3 + 2 - x) & x < 2 \\ x^2 + 4x + 6 & 3 > x \geq 2 \\ \frac{6x+36}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & x \geq 3 \end{cases}$$

מיצאו את f' בנקודות בהן f גזירה.

ב. (11 נק') האם f' רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$? אם לא – מיצאו את נקודות אי-הרציפות של f' , וסווגו אותן.

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (11 נק') תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) . יהיו $x_1, x_2 \in (a, b)$. הוכיחו כי קיימת $x \in (a, b)$ כך ש- $f(x) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

ב. (11 נק') הוכיחו שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$.

שאלה 4 (22 נקודות)

א. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

ב. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-1}{2n^3+9}\right)^{3n^3+9}$.

שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

$$\text{א. (7 נק') } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

$$\text{ב. (7 נק') } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7n^2}{\sqrt{5n^6-n+14}}$$

$$\text{ג. (7 נק') } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$$

בהצלחה!