

טופולוגיה תיכוניסטים תשפ"א - בוחן

מרצים: פרופסור מיכאל מגרל, ד"ר אייל סובג.
מתרגלים: תמר בר-און, גלעד פורת קורן, מתן קומיסרצ'יק
עליכם לענות על כל השאלות.

1. נזכיר כי $l_\infty = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup |x_n| < \infty\}$. זהו מרחב נורמי עם נורמת אינסוף:

$$\|(x_n)\| = \sup |x_n|$$

(א) (20 נקודות) נגדיר $D = \{(x_i) \in l_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1}\}$, מרחב הסדרות המונוטוניות יורדות חלש. הוכיחו כי D סגורה. (הערה: ניקוד חלקי יינתן למי שיפתור עבור הקבוצה הבאה: $C = \{(x_n) \in l_\infty : x_1 \geq x_2\}$)
 (ב) (20 נקודות) נגדיר $E = \{(x_i) \in l_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n > x_{n+1}\}$, מרחב הסדרות המונוטוניות יורדות חזק. הוכיחו כי E אינה סגורה.

2. (30 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו: פונקציית ליפשיץ.
 (ב) (25 נקודות) תזכורת: הטופולוגיה ה- p אדית על \mathbb{Z} מוגדרת כך:

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$$

כאשר $k(x, y) = \max\{i : p^i \mid x - y\}$.
 קבעו האם הפונקציה $f : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_p)$ שמוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ היא פונקציית ליפשיץ.

3. (30 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו: מרחב קשיר.
 (ב) (25 נקודות) נסתכל על \mathbb{Z} עם הטופולוגיה של פורטסנברג שמוגדרת כך שהקבוצה

$$\{a\mathbb{Z} + b : a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$$

מהווה בסיס. כלומר, הקבוצות הפתוחות הן איחודים של קבוצות מהצורה

$$a\mathbb{Z} + b$$

כאשר $a \neq 0$. הוכיחו שהמרחב בלתי קשיר לחלוטין. כלומר, שרכיבי הקשירות הם הנקודונים.