פתרון תרגיל 11 בדידה להנדסה:

1. נסביר איך בנינו את הפונקציה.

לכל זוג סדור נתאים מספר טבעי באופן הבא:

$$\begin{array}{ccccc}
\underset{1}{(1,1)} & \underset{3}{(1,2)} & \underset{6}{(1,3)} & \underset{10}{(1,4)} & \underset{15}{(1,5)} \\
\underset{2}{(2,1)} & \underset{5}{(2,2)} & \underset{9}{(2,3)} & \underset{14}{(2,4)} & \\
\underset{4}{(3,1)} & \underset{8}{(3,2)} & \underset{13}{(3,3)} & & \\
\underset{7}{(4,1)} & \underset{12}{(4,2)} & & & \\
\underset{11}{(5,1)} & & & &
\end{array}$$

וכן הלאה.

אנחנו שמים באלכסון הראשון את הזוגות שסכומם 2, באלכסון השני את הזוגות שסכומם 3 ועל זו הדרך. כלומר, באלכסון ה$-n$ יש את כל הזוגות שסכומם $n+1$, ויש n זוגות כאלה.

לפי הבנייה, המיקום של הזוג הראשון שסכום איבריו הוא n הוא:

$$1+(1+2+3+...+(n-2))=1+\frac{(1+n-2)(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+4}{2}$$

כעת, המיקום של הזוג השני שסכום איבריו הוא n הוא $\frac{n^2-3n+4}{2}+1$, ובאופן כללי המיקום של הזוג ה$-k$ שסכום איבריו הוא n יהיה:

$$\frac{n^2-3n+4}{2}+k$$

כלומר, הזוג שלנו (a,b) שמקיים $n=a+b$ הולך ל:

$$\frac{n^2-3n+4}{2}+k=\frac{(a+b)^2-3(a+b)+4}{2}+b$$

$k=b$, כי האיבר הראשון שסכומו n הוא $(n-1,1)$, כלומר המיקום בתוך האלכסון הוא פשוט b (כי התחלנו ב-1).

מהבנייה, f חח"ע ועל, כי כל זוג ממוקם במקום אחר (ולכן חח"ע) וכל זוג ממוקם במיקום כלשהו (ולכן על).

2. נוכיח זאת.

מכיוון שמתקיים $A \subseteq B$, אפשר להגדיר פונקציה $f : A \to B$:

$$f(a) = a$$

וברור שזו פונקציה חח"ע. לכן, לפי ההגדרה, $|A| \leq |B|$.

3. נתבונן בקבוצת המספרים בקטע $(0,1)$ שבפיתוחם העשרוני לא מופיעות הספרות $0, 9$. נסמנה A.

למה? כדי שמספרים לא יחזרו על עצמם (למשל $0.300000 = 0.299999....$) ואז הפונקציה לא תהיה חד ערכית.

כעת, נניח בשלילה שקיימת פונקציה על: $f : \mathbb{N} \to A$. הפונקציה נראית כך:

$$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}...$$

$$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}...$$

$$f(3) = 0.a_{31}a_{32}a_{33}...$$

נסמן:

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_{nn} \neq 1 \\ 2 & a_{nn} = 1 \end{cases}$$

כעת, נתבונן במספר $0.b_1b_2b_3...$. נניח בשלילה שיש לו מקור, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $f(n) = 0.b_1b_2b_3...$. אלא שאז נקבל:

$$0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}... = 0.b_1b_2b_3...$$

והמספרים האלו אינם שווים כי $b_n \neq a_{nn}$ וסתירה! לכן אין מקור למספר שלנו ולכן הפונקציה אינה על.

כעת, $A \subset (0,1) \subset \mathbb{R}$, ולכן אם לא קיימת $f : \mathbb{N} \to A$ על בוודאי שלא קיימת $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ על.

אם לא קיימת על כזו, בוודאי לא קיימת פונקציה כזו חח"ע ועל, ולכן לפי ההגדררה, $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

4. נתבונן בקבוצה:

$$\{0,1\}^A = \{f | f : A \to \{0,1\}\}$$

לפי ההגדרה, עוצמת הקבוצה היא:

$$|\{0,1\}^A| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

כעת, לכל $B \in P(A)$ נתבונן בפונקציה: $\chi_B : A \to \{0,1\}$ המוגדרת ע"י:

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

פונקציה זו נקראת הפונקצייה המאפיינת של B (אינדיקטור).

ראשית, נשים לב שזו פונקציה, מכיוון שכל איבר בקבוצה A או שהוא נמצא בקבוצה B או שהוא לא (ולכן זהו יחס שלם), ואיבר לא יכול להיות בקבוצה B ולא להיות בקבוצה B (ולכן חד ערכי).

כעת נגדיר פונקציה: $\psi : P(A) \to \{0,1\}^A$ ע"י:

$$\psi(B) = \chi_B$$

כלומר, הפונקציה לוקחת קבוצה למאפיין שלה.

שימו לב שזו אכן פונקציה.

נראה שהפונקציה ψ שלנו היא חח"ע ועל.

נניח שמתקיים $\psi(B_1)=\psi(B_2)$ כאשר $B_1,B_2\in P(A)$. כלומר $\chi_{B_1}=\chi_{B_2}$.

נניח בשלילה שהמקורות שונים, כלומר $B_1\neq B_2$. לכן, בלי הגבלת הכלליות קיים $b\in B_1\backslash B_2$ (אם קיים $b\in B_2\backslash B_1$ ההוכחה זהה).

לכן, מהגדרת הפונקציה המאפיינת, $\chi_{B_1}(b)=1$ אך $\chi_{B_2}(b)=0$ בסתירה לכך שמתקיים: $\chi_{B_1}=\chi_{B_2}$.

לכן $B_1=B_2$ ולכן הפונקציה חח"ע.

כעת, תהי $f\in\{0,1\}^A$. נראה שיש לה מקור ב$-P(A)$.

נתבונן בקבוצה: $B_f=\{a\in A|f(a)=1\}$. זוהי תת קבוצה של A, ולכן $B_f\in P(A)$.

מהגדרת הקבוצה B_f, ניתן לראות שמתקיים:

$$f(a)=\begin{cases}1 & a\in B\\ 0 & a\notin B\end{cases}$$

כלומר $f=\chi_{B_f}$, ולפי הגדרת ψ נקבל שמתקיים:

$$\psi(B_f)=f$$

כלומר B_f מקור של f. לכל f אפשר לבנות את הקבוצה B_f הזו, לכן לכל f יש מקור ולכן ψ על.

ψחח"ע ועל ולכן לפי ההגדרה:

$$|P(A)|=|\{0,1\}^A|=2^{|A|}$$

והוכחנו את הדרוש.

5. נתבונן תחילה בקטעים הסגורים $[a,b],[c,d]$.

נחפש פונקציה מהצורה $f(x)=mx+n$ כך שמתקיים: $f(a)=c,f(b)=d$.

כלומר, צריכות להתקיים המשוואות:

$$c = f(a) = ma + n$$

$$d = f(b) = mb + n$$

נפתור אותן ונקבל: $m = \frac{c-d}{a-b}, n = \frac{ad-bc}{a-b}$. לכן הפונקציה שלנו תהיה:

$$f(x) = \frac{c-d}{a-b} \cdot x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

קל לראות שהפונקציה חח"ע. כדי להראות שהפונקציה על, נראה שלכל $y \in [c,d]$ יש מקור $x \in [a,b]$:

$$y = \frac{c-d}{a-b} \cdot x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

ולכן:

$$x = \frac{y - \frac{ad-bc}{a-b}}{\frac{c-d}{a-b}}$$

הוא המקור של y.

אותה פונקציה תעבוד גם לקטעים הפתוחים והחצי־סגורים־חצי־פתוחים (סגוחים); פשוט נתעלם מהאיברים בקצה.

6. נתבונן בפונקציה: $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

זו פונקציה חח"ע, מכיוון שאם $tanx_1 = tanx_2$ אז:

$$x_1 = x_2 + \pi k$$

כאשר $k \in \mathbb{Z}$, ומכיוון שאנו בתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, נקבל $x_1 = x_2$ (אם נוסיף כפולות של πכבר נצא מחוץ לתחום).

הפונקציה על, כי לכל $y \in \mathbb{R}$, $x = \arctan y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ הוא המקור של y.

זו פונקציה חח"ע ועל, ולכן לפי ההגדרה $|\mathbb{R}| = |\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)|$.

כעת, לפי שאלה 5 נקבל:

$$|(0,1)| = |\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)|$$

ולפי כלל המעבר:

$$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$$

ואם ניכנס קצת יותר לעומק, יש לנו פונקציה חח"ע ועל מהקטע $(0,1)$ לקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ופונקציה חח"ע ועל מהקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ לכל $\mathbb{R}$.

ההרכבה שלהן גם תהיה חח"ע ועל, לפי מה שראינו ביחס להרכבת פונקציות.

7. נבדוק האם הפונקציות הן חח"ע ועל.

א. הפונקציה שלנו חח"ע; אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1^5 + 1 = x_2^5 + 1$ ולכן $x_1 = x_2$.

הפונקציה שלנו על; לכל y, המקור שלו יהיה $\sqrt[5]{y-1}$.

הפונקציה היא חח"ע ועל, לכן הפיכה. מהבדיקה לעל קל לראות שההופכית היא:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-1}$$

ב. הפונקציה שלנו חח"ע; אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $2^{x_1} = 2^{x_2}$. לכן, $2^{x_1 - x_2} = 1$ ולכן $x_1 - x_2 = 0$ כלומר $x_1 = x_2$.

הפונקציה שלנו על; לכל $y > 0$, המקור שלו הוא: $x = \log_2 y \in \mathbb{R}$.

הפונקציה חח"ע ועל, ולכן היא הפיכה. מהבדיקה לעל קל לראות שההופכית היא:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

ג. נתבונן ב־$e^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. לא קיים $x \in \mathbb{Q}$ עבורו $f(x) = e^x = e^{\sqrt{2}}$ ולכן הפונקציה אינה על.

לכן הפונקציה אינה הפיכה.

ד. נתבונן ב־$-1 \in \mathbb{R}$. לא קיים $x \in \mathbb{R}$ עבורו $f(x) = e^x = -1$ ולכן הפונקציה אינה על.

הפונקציה אינה על ולכן אינה הפיכה.

ה. הפונקציה חח"ע ועל כמו בסעיף ב' (רק עם e במקום עם 2) ולכן היא הפיכה.

כמו בסעיף ב', ההופכית תהיה:

$$f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x$$

.