פתרון תרגיל 2 במבוא לתורת החבורות תשעט

שאלה 1. בכל סעיף, קבעו האם תת-הקבוצה הנתונה היא תת-חבורה:

1. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f \text{ is invertible and } f(1)>0\}\subseteq\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f \text{ is invertible}\}$.
2. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f \text{ is invertible and } f(1)=1\}\subseteq\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f \text{ is invertible}\}$.

הפעולה היא הרכבת פונקציות.

פתרון.

1. זו <u>לא</u> תת-חבורה, כי אין סגירות; למשל, נסתכל על $f(x)=x-\frac{1}{2}$. ודאי ש-f הפיכה ו-$f(1)=\frac{1}{2}>0$, אבל

$$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=0\not>0$$

כלומר $f\circ f$ אינה בתת-הקבוצה הזו, ולכן זו לא תת-חבורה.

2. פה נוכיח שזו כן תת-חבורה. נסמן אותה H. שוב, לפי הקריטריון המקוצר.
ראשית, $\text{Id}\in H$ כי היא הפיכה וכן $\text{Id}(1)=1$.
כעת, נניח $f,g\in H$. רוצים להראות כי $f\circ g^{-1}\in H$. ראשית, כיוון ש-f ו-g הפיכות, גם $f\circ g^{-1}$ הפיכה. כמו כן,

$$\left(f\circ g^{-1}\right)(1)=f\left(g^{-1}(1)\right)=f(1)=1$$

ולכן בסך הכל $f\circ g^{-1}\in H$, כדרוש.

שאלה 2. תהי G חבורה, ויהיו $H,K\leq G$ תתי-חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H\cap K\leq G$ היא תת-חבורה של G.

ב. $H\cup K\leq G$ היא תת-חבורה של G.

פתרון.

א. הטענה נכונה. נוכיח עם הקריטריון המקוצר:

(א) $H,K\leq G$, ולכן $e\in H$ וגם $e\in K$, כלומר $e\in H\cap K$.

(ב) כעת, נניח $g_1,g_2\in H\cap K$. לכן $g_1,g_2\in H$ וגם $g_1,g_2\in K$. כיוון ש-$H,K\leq G$, מתקיים $g_1g_2^{-1}\in H$ וגם $g_1g_2^{-1}\in K$; לכן, $g_1g_2^{-1}\in H\cap K$.

לפי הקריטריון המקוצר, $H\cap K\leq G$.

ב. הטענה אינה נכונה. למשל, ניקח $G=\mathbb{Z}$, $H=2\mathbb{Z}$, $K=3\mathbb{Z}$. קל לוודא כי

$$H\cup K=\{0,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm9,\dots\}$$

אבל אין סגירות לחיסור – למשל, $3-2=1\notin H\cup K$.
באופן כללי, $H\cup K\le G$ אם ורק אם $K\subseteq H$ או $H\subseteq K$; לכן, כל דוגמה של שתי תתי-חבורות שאף אחת אינה מוכלת בשנייה תעבוד.

הגדרה. תהיינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נזכור ממתמטיקה בדידה את המכפלה הקרטזית

$$G\times H=\{(g,h)\,|g\in G,h\in H\}$$

נגדיר פעולה על $G\times H$ רכיב-רכיב,

$$(g_1,h_1)\odot(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

שיחד איתה הופכת את $G\times H$ לחבורה. מי הוא איבר היחידה?

שאלה 3. תהיינה G,H חבורות. הוכיחו: $G\times H$ היא אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

הוכחה. נוכיח כל גרירה בנפרד.
$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-$G\times H$ אבלית. צ"ל ש-G ו-H אבליות. נוכיח ש-G אבלית (ההוכחה עבור H באופן סימטרי).
יהיו $g_1,g_2\in G$. רוצים להוכיח כי $g_1g_2=g_2g_1$. נשים לב כי

$$(g_1g_2,e_H)=(g_1,e_H)\,(g_2,e_H)=(g_2,e_H)\,(g_1,e_H)=(g_2g_1,e_H)$$

כאשר במעבר השני השתמשנו בנתון ש-$G\times H$ אבלית. כיוון שקיבלנו שוויון של זוגות סדורים, הרכיב הראשון שווה – לכן $g_1g_2=g_2g_1$, ובסך הכל G אבלית.
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-G ו-H אבליות. צ"ל ש-$G\times H$ אבלית.
יהיו $(g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G\times H$. לכן

$$(g_1,h_1)\,(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)=(g_2g_1,h_2h_1)=(g_2,h_2)\,(g_1,h_1)$$

כאשר במעבר השני השתמשנו בנתון ש-G ו-H אבליות. לכן $G\times H$ אבלית. $\square$

שאלה 4. תהיינה G,H חבורות. האם כל תת-חבורה K של $G\times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1\times K_2$, כאשר K_1 תת-חבורה של G ו-K_2 תת-חבורה של H? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

פתרון. התשובה היא **לא!**
ניקח $G=H=\mathbb{Z}$ (אפשר לקחת כל חבורה לא טריוויאלית). כלומר $G\times H=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
נסתכל על

$$K=\{(n,n):n\in\mathbb{Z}\}$$

K אכן חבורה (בדקו!), אבל אי אפשר להציג את K כמכפלה של תתי-חבורות $K_1\times K_2$ כנ"ל (כי אז $0,1\in K_1$ וגם $0,1\in K_2$, ומקבלים $(0,1)\in K_1\times K_2$, כלומר $K_1\times K_2\neq K$).
.

שאלה 5. הוכיחו שמתקיים: $Z\left(GL_n\left(\mathbb{R}\right)\right)=\{\alpha I:a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}$.

פתרון. כל מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה הפיכה.
לכיוון השני, תהי $B\in Z\left(GL_n\left(\mathbb{R}\right)\right)$. נתבונן במקרה $n=2$, נניח בשלילה ש-B איננה סקלרית. כלומר, אם נרשום:

$$B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

אז $a \neq d$ או $b \neq 0$ או $c \neq 0$. מכיוון ש-B נמצאת במרכז, היא מתחלפת עם כל מטריצה, ובפרט:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 2b & a \\ 2d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

אם נשווה איבר-איבר בשתי השורות נקבל: $a = d \wedge b = c \wedge c = 2b$ ואז $a = d \wedge b = 0 \wedge c = 0$, וסתירה; לכן B סקלרית.

חשבו איך אפשר להכליל זאת לכל n (אינדוקציה, כפל של מטריצות בלוקים...)

דרך נוספת: נסמן E_{ij} את המטריצה שבה כל האיברים הם 0 חוץ מהאיבר ה-ij, ששווה ל-1. מכיוון ש-B במרכז, מתקיים:

$$B\left(I+E_{ij}\right)=\left(I+E_{ij}\right)B$$

הוספנו I כדי לקבל מטריצה הפיכה. השוויון נכון לכל $1 \leq i,j \leq n$. נקבל ש:

$$BE_{ij}=E_{ij}B$$

במכפלה משמאל נקבל את העמודה ה-i של B בעמודה ה-j והשאר אפסים; במכפלה מימין נקבל את השורה ה-j של B בשורה ה-i והשאר אפסים, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & b_{1i} & \ldots & 0 \\ & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & \ldots & b_{ni} & \ldots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & \ldots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

בדקו שכל השוויונים נותנים ביחד את המבוקש: $b_{ij}=0$ כאשר $i \neq j$, $b_{ii}=b_{jj}$.

.