

תרגיל 9

שאלה 1

מצא את הנקודה על הפרבולה $y = 2x^2 + 5$ שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

הדרכה:

מרחק של נקודה (x, y) מראשית הצירים נתון על ידי נוסחה $\sqrt{x^2 + y^2}$.
תבנו פונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$, בטאו אותה באמצעות x , ומצאו את המינימום המוחלט שלה.

שאלה 2

מצא מינימום ומקסימום מוחלט עבור הפונקציה הבאה בקטע $[-2, 2]$:

$$f(x) = 4 + |1 - x^2|$$

שאלה 3

מצא נקודות קיצון מקומי ומוחלט (אם יש), תחומי עליה/ירידה, נקודות פיתול (אם יש), תחומי קמירות/קעירות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x \cdot e^x \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \ln(\sin(x)) \quad \text{בתחום } (0, \pi) \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \sin^2(x) \quad \text{בתחום } [0, \pi] \quad (\text{ד})$$

שאלה 4

(א) הוכח שלמשוואה $2x = \cos(x)$ יש פתרון יחיד

(ב) מצא את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות בקטע נתון:

$$x^4 + x^2 = 2 \quad \text{בקטע } [0, 2] \quad (1)$$

$$e^x = 10x \quad \text{בקטע } [0, 10] \quad (2)$$

(ג) תהי $f(x) = \ln^2(x) - 5\ln(x) + 6$ הוכיח כי קיימת נקודה $c \in [e^2, e^3]$ כך ש-

$$f'(c) = 0$$

שאלה 5

(א) תהי f גזירה ב- (a, b) ורציפה ב- $[a, b]$ כל ש- $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a, b)$. הוכיחו ש- f קבועה בקטע.

$$\frac{b-a}{1+b} < \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right) < \frac{b-a}{1+a} \quad \text{מתקיים } 0 < a < b$$

הדרכה: נשתמש במשפט לגרנג' בפונקציה $\ln(1+x)$

$$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$$