תרגיל 3

להגשה בכ"ח חשוון (13.11) או א' כסליו (15.11) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. הוכח[1] שחיבור מטריצה הוא אסוציאטיבית כלומר $(A+B)+C=A+(B+C)$ עבור מטריצות מאותו גודל.

2. נתונות 2 מטריצות $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (א) מצא את $(AB)_{11},(AB)_{13},(AB)_{22}$

   (ב) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A [2].

   (ג) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השניה של AB כסכום משוקלל של שורות B.

   (ד) בעזרת כפל עמודה שורה פרק את AB לסכום של 3 מטריצות מגודל 2×3 וחשב את התוצאה הסופית AB.

הגדרה: בהנתן מטריצה A. החזקה של A מוגדרת להיות $A^n := \underbrace{AA\cdots A}_{n\,times}$

3. עבור $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ חשב את את העמודה הראשונה של A^4.

4. יהיו מטריצות: A בגודל 3×3 , B בגודל 4×5, C בגודל 5×1 ; D בגודל 5×4 ו- E בגודל 3×5 אלו מבין הפעולות הבאות מוגדרת? במידה והפעולה מוגדרת מה גודל המטריצה המתקבלת?

   (א) BCB

   (ב) $B+D$

   (ג) A^3E

   (ד) $A(E+E)D$

---

[1] גם אם לא מצויין במפורש α תמיד מייצג סקלאר, A,B מטריצות בכל התרגיל

[2] סכום משקולל הוא $\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\cdots+\alpha_nc_n$ כאשר c_i עמודות מטריצה ו α_i סקאלרים

(ה) ED

(ו) BC

5. יהיו $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
הבן מה נותנת המכפלה $E_1A,\ E_2A,\ E_3A$ עבור מטריצה A כלשהיא וע"י כך חשב את $E_1^{10},\ E_2^{10},\ E_3^{10}$.[3]

הגדרה: תהא A מטריצה כלשהיא מגודל $m \times n$. המטריצה המשוחלפת של A היא המטריצה A^t בגודל $n \times m$ המוגדרת $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}$.

6. הוכח (בהנחה שהפעולות המופיעות בסעיפים מוגדרות):

(א) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

(ב) $(AB)^t = B^t A^t$

(ג) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(ד) $AA^t,\ A^tA$ - תמיד מוגדר ותמיד מטריצות סימטריות.

(ה) עבור מטריצה ריבועית A - $A + A^t$ מטריצה סימטרית, $A - A^t$ מטריצה אנטי סימטרית.

(ו) $trace(A) = trace(A^t)$

(ז) $trace(\alpha A) = \alpha \cdot trace(A)$

בהצלחה!

[3] מספיק תשובה סופית ונימוק- ללא חישוב מפורש.