אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 9

שאלה 1

לאילו ערכי a, b הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x^2 + ax + b & x < 0 \end{cases}$$

גזירה לכל x?

פתרון: בכל נקודה $x \neq 0$ הפונקציה גזירה (כפונקציה מעריכית או פולינום). באשר לנקודה $x = 0$, תחילה נבדוק לגבי רציפות (שהיא הכרחית עבור גזירות). רציפות מימין ב־$x = 0$ מובטחת, כיוון ש־$f(x) = e^x$ ב־$[0, \infty)$. באשר לגבול השמאלי:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + ax + b) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b$$

(השוויון הלפני אחרון בגלל שהפולינום $x^2 + ax + b$ רציף ב־$x = 0$). לכן על מנת ש־$f(x)$ תהיה רציפה ב־$x = 0$ יש לדרוש $b = f(0) = e^0 = 1$, ז"א $\boldsymbol{b = 1}$.

כעת נבדוק גזירות ב־$x = 0$:

בקרן $[0, \infty)$, $f(x) = e^x$, לכן הנגזרת החד־צדדית הימנית של $f(x)$ ב־$x = 0$ היא

$$f'_+(0) = (e^x)'(0) = e^0 = 1$$

בקרן $(-\infty, 0]$, $f(x) = x^2 + ax + 1$ (שימו לב שניתן לצרף את $x = 0$ בקצה הימני של הקרן כי בנקודה זו הפולינום אכן מקבל את הערך $f(0) = e^0 = 1$). לכן הנגזרת החד־צדדית הימנית של $f(x)$ ב־$x = 0$ היא

שאלה 2

הוכיחו שלמשוואה $2x = \cos x$ יש פתרון ממשי יחיד.

הוכחה: הפונקציה $f(x) = 2x - \cos x$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = 2\pi + 1 > 0$, לכן ממשפט ערך הביניים יש $x_0 \in (0, \pi)$ כך ש־$f(x_0) = 0$, כלומר $2x_0 = \cos x_0$, ולמשוואה קיים פתרון.

נוכיח שהפתרון יחיד: נניח בשלילה שהפתרון אינו יחיד. אז יש פתרון נוסף x_1, $f(x_0) = f(x_1) = 0$. ממשפט רול נובע שקיימת נקודה c בין x_0 ל־x_1 שבה $f'(c) = 0$. אבל $f'(x) = 2 + \sin(x) \geq 2 - 1 > 0$ ולכן לא ייתכן שהנגזרת מתאפסת, סתירה.

שאלה 3

הוכיחו שעבור $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$.

הוכחה:

נניח $0 < a < b$ כלשהם. הפונקציה $f(x) = \ln x$ גזירה בקטע $[a,b]$, לכן ממשפט הערך הממוצע של לגרנז' קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. נשים לב:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

וכיוון ש־$a < c < b$, מתקיים $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. ביחד נקבל בסה"כ

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} < \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

שאלה 4

א. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $\frac{2x}{1+x^2}$ בציר הממשיים.

ב. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $0 < \ln(1+x^2) \le x$.

פתרון

א. נגזור את הפונקציה ונמצא נקודות קיצון.

נסמן: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$0 = 2-2x^2$$

$$x = 1, x = -1$$

נבדוק את ערך הפונקציה בנקודות אלה והפונקציה עם הערך הגדול יותר הוא יהיה הערך המקסימלי

$$f(1)=\frac{2}{1+1}=1$$
$$f(-1)=\frac{-2}{1+1}=-1$$

ולכן 1 הוא הערך המקסימלי של הפונקציה.

ב. נגדיר $f(x)=\ln(1+x^2)$.

תהי $0<x$. אזי מתקיים שהפונקציה רציפה בקטע $[0,x]$ והיא גזירה בקטע $(0,x)$ ולכן לפי משפט הממוצע של לגרנג' קיימת נקודה $0<c<x$ כך שמתקיים :

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

מצד שני, מתקיים :

$$f'(c)=\frac{2c}{2+c^2}$$

נסמן ב-g את פונקציית הנגזרת של f.

בסעיף הקודם ראינו כי הערך המקסימלי של g הוא 1 ולכן מתקיים :

$$f'(c)=\frac{2c}{2+c^2}\le 1$$

כלומר בעצם מתקיים :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x}\le 1$$

כלומר :

$$\ln(1+x^2)\le x$$

ומתקיים ש : $0<\ln(1+x^2)$ לפי הגדרת פונקציית הln .

ולכן סך הכל קיבלנו :

$$0<\ln(1+x^2)\le x$$