מכפלה של מרחבים מטריזביליים

14 ביוני 2015

טענה 1:

יהיו $(X_1,\tau_1),\ldots,(X_n,\tau_n)$ מרחבים טופולוגיים מטריזביליים, אזי $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) מטריזבילי.

הוכחת טענה 1:

נמצאת בתרגול 11.

טענה 2:

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{\infty}$ מרחבים טופולוגיים מטריזביליים, אזי $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) מטריזבילי.

טענת עזר:

יהי (X,d) מרחב מטרי. אם $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ עולה ממש, קעורה ומתקיים $f(0)=0$, אזי $\tilde{d}=f\circ d$ היא גם מטריקה על X.

הוכחת טענת העזר:

חיוביות וסימטריה נובעות מיידית מתכונותיהן של d ושל f.

יהיו $x,y,z\in X$. מכיוון ש$-d$ מטריקה נקבל:

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

מכיוון ש$-f$ מונוטונית עולה נקבל:

$$\tilde{d}(x,z)=f(d(x,z))\leq f(d(x,y)+d(y,z))$$

מהקעירות של f נקבל שלכל $t > 0$ ולכל $a \geq 0$ מתקיים:

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{(a+t)-a} \leq \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$$

ומכיוון ש$-f(0)=0$ נקבל:

$$f(a+t) \leq f(a)+f(t)$$

ולכן:

$$\tilde{d}(x,z) = f(d(x,z)) \leq f(d(x,y)+d(y,z)) \leq f(d(x,y))+f(d(y,z)) = \tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z)$$

לכן $\tilde{d}$ מקיימת את אי־שיוויון המשולש ולכן $\tilde{d}$ מטריקה על X.

הוכחת טענה 2:

נראה ש$-X$ מטריזבילי עם המטריקה:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i(1+d_i(x_i,y_i))}$$

כאשר d_i היא מטריקה המשרה את τ_i על X_i לכל i.

נתבונן בפונקציה $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

מטענת העזר נקבל שלכל i, $2^{-i}(f \circ d_i)$ מגדירה מטריקה על X_i. מכאן נובע ש$-d$ היא אכן מטריקה על X.

נסמן ב$-\tau_\pi$ את טופולוגיית המכפלה על X וב$-\tau_d$ את הטופולוגיה שהמטריקה d משרה על X.

תהי $U=\prod_{i=1}^{\infty}U_i$ קבוצת בסיס של τ_π, ויהי $x\in U$.

קיימת קבוצה סופית של אינדקסים I כך שלכל אינדקס $i\notin I$, $U_i=X_i$.

לכל $i\in I$ קיים $\varepsilon_i>0$ כך ש: $B_i=\{y_i\in X_i : d_i(y,x_i)\le\varepsilon_i\}\subseteq U_i$. נסמן:

$$\varepsilon=\min\{2^{-i}f(\varepsilon_i) : i\in I\}$$

מכיוון שהקבוצה I סופית, $\varepsilon>0$.

כעת, נראה שהכדור $B=\{y\in X : d(y,x)<\varepsilon\}$ מוכל ב$-U$.

יהי $y\in X$ כך ש: $d(y,x)<\varepsilon$. כעת, לכל אינדקס i ובפרט לכל אינדקס $i\in I$ מתקיים:

$$2^{-i}(f\circ d_i)(y_i,x_i)<\varepsilon$$

כלומר:

$$d_i(y_i,x_i)<f^{-1}(2^i\varepsilon)\le f^{-1}(2^i\cdot 2^{-1}f(\varepsilon_i))=\varepsilon_i$$

לכן $y_i\in B_i\subseteq U_i$ לכל i ולכן $B\subseteq U$. לכן $\tau_\pi\subseteq\tau_d$.

לכיוון השני, יהיו $z\in X$, $\varepsilon>0$ ותהי $B=\{y\in X : d(y,z)<\varepsilon\}$ קבוצת בסיס ב־τ_d.

נבחר N טבעי כך ש: $2^{-N}<\frac{\varepsilon}{3}$.

לכל $i\le N$ נגדיר: $U_i=\{y_i\in X_i : d_i(y_i,z_i)<\frac{\varepsilon}{2N}\}$.

לכל $i>N$ נגדיר: $U_i=X_i$.

כעת, $U=\prod_{i=1}^{\infty}U_i$ היא קבוצת בסיס של τ_π.

יהי $y\in U$. כעת:

$$d(y,z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i(y_i,z_i)}{2^i(1+d_i(y_i,z_i))}+\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{d_i(y_i,z_i)}{2^i(1+d_i(y_i,z_i))}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N}d_i(y_i,z_i)+\sum_{i=N+1}^{\infty}2^{-i}\le\sum_{i=1}^{N}(\frac{\varepsilon}{2N})+2^{-N}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן $y \in B$, כלומר $B \subseteq U$ ולכן $\tau_d \subseteq \tau_\pi$.

אם כן, בסה"כ $\tau_d = \tau_\pi$ ולכן המרחב X עם טופולוגיית המכפלה מטריזבילי.

<u>שאלה 1:</u>

האם מטריקת (האמנם זו מטריקה?) הסופרימום, המוגדרת ע"י:

$$d_{sup}(x,y) = \sup\{d_i(x_i,y_i) : i \in \mathbb{N}\}$$

משרה את טופולוגיית המכפלה?

חשבו על $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ כאשר לכל $i \in \mathbb{N}$, $X_i = [-1,1]$. התבוננו בכדור:

$$B_{d_{sup}}((0)_{i=1}^{\infty}, \frac{1}{2}) = \sup\{|x_i| : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X\}$$

כדי שהתשובה תהיה חיובית, קיימת קבוצה סופית של אינדקסים I עבורה לכל $i \notin I$, $U_i = X_i$ כך ש:

$$U = \prod_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq B_{d_{sup}}((0)_{i=1}^{\infty}, \frac{1}{2})$$

האם קיימת קבוצה כזו?

<u>שאלה 2:</u>

מה קורה אם המכפלה אינה בת מניה?

לדוגמה, תהי J קבוצה בת מניה ונתבונן במרחב:

$$\mathbb{R}^J = \prod_{\alpha \in J} \mathbb{R}$$

תהי Y תת הקבוצה של כל האיברים $(x_\alpha) \in \mathbb{R}^J$ שעבורם $x_\alpha = 1$ למעט מספר סופי של אינדקסים.

כעת, נסמן $(0_\alpha) = 0$ כלומר האיבר שכל הקואורדינטות שלו הן אפסים.

תהי $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ קבוצת בסיס בטופולוגיית המכפלה כך ש: $0 \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$. לכל קבוצה כזו יש חיתוך לא ריק עם Y.

לכן, פירוש הדבר ש־$0 \in cl(Y)$.

מצד שני, האם קיימת סדרה ב־Y המתכנסת ל־0?

אם אין כזו, למה $\mathbb{R}^J$ עם טופולוגיית המכפלה אינו מטריזבילי?

הערה:

באופן כללי, כל מרחב מטרי מקיים את אקסיומת המנייה הראשונה. שאלו את הרב גוגל.