אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל 4

1. תהי A מטריצה הפיכה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.1. קיימת ל A מטריצה הופכית יחידה.

הוכחה: נניח כי B,C מטריצות הפיכות של A. מספיק להוכיח: $B=C$.
B,C מטריצות הפיכות של A לכן, $AB=BA=I$ וכן $AC=CA=I$.
לכן, $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$. מש"ל.

1.2. A^t הפיכה.

הוכחה: A מטריצה הפיכה, לכן קיימת מטריצה B כך ש $AB=I$.
נפעיל שיחלוף על שני הצדדים ונקבל,

$$(AB)^t=I^t \Rightarrow$$
$$B^tA^t=I$$

לכן A^t הפיכה משמאל ולכן הפיכה. מש"ל.

1.3. A^5 הפיכה.

הוכחה: נתון A מטריצה הפיכה. נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי A^n הפיכה ונקבל בפרט, A^5 הפיכה.
עבור $n=1$, נתון כי $A^n=A^1=A$ הפיכה.
נניח כי A^n הפיכה ונוכיח בהסתמך על כך כי A^{n+1} הפיכה.
A^n הפיכה לכן קיימת $(A^n)^{-1}$. בנוסף, נתון כי A הפיכה, לכן קיימת A^{-1}.
אבל, $A^{n+1}((A^n)^{-1}A^{-1})=(AA^n)((A^n)^{-1}A^{-1})=A(A^n)(A^n)^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$
לכן A^{n+1} הפיכה מימין ולכן הפיכה.

2. תהא $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times2}(F)$. נסמן $\Delta=ad-bc$. הוכיחו כי:

2.1. אם $\Delta\neq0$ אז A הפיכה ו $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

הוכחה: נחשב: $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)I=\Delta I$$

לכן, אם $\Delta\neq0$ אז $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\Delta I\Rightarrow\frac{1}{\Delta}A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=I\Rightarrow A\left(\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)=I$

ו A הפיכה מימין ולכן הפיכה. וההופכית הימנית היא ההופכית שלה לכן, $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.2. אם $\Delta=0$ אז A אינה הפיכה.

הוכחה: ראינו $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Delta I$ לכן אם $\Delta = 0$ אז $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0$. אם $A = 0$ אז ברור כי A אינה הפיכה. אחרת, גם $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq 0$ ו A מחלקת אפס. לכן A אינה הפיכה.

.3 אנו מניחים, אם כן, כי A מטריצה ריבועית מסדר n המקיימת: $A^k = \underline{\underline{0}}$, כאשר k מספר טבעי כלשהו.

המטריצה A איננה מטריצה הפיכה:

נניח על דרך השלילה, כי A הפיכה, ויהי $\vec{z}_0 \neq \vec{0}$ ווקטור עמודה כלשהו (מסדר $n \times 1$). בהתאמה מגדירים:

$\vec{z}_1 := A \cdot \vec{z}_0,\ \vec{z}_2 := A \cdot \vec{z}_1,\ \vec{z}_3 := A \cdot \vec{z}_2 \ldots,\ \vec{z}_k := A \cdot \vec{z}_{k-1}$

אזי, מההנחה כי A הפיכה מתקיים כי:

$\forall \vec{z} \neq \vec{0}\ \exists \vec{y} \neq \vec{0} :\ A \cdot \vec{z} = \vec{y}$

כלומר, חייב להתקיים כי:

$\vec{z}_0 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{z}_1 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{z}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \vec{z}_k \neq \vec{0}$

אבל מאופן בניה של קבוצת הווקטורים, $\left\{\vec{z}_j\right\}_{j=0}^{k}$, מתקיים כי:

$\vec{z}_k = A \cdot \vec{z}_{k-1} = A^2 \cdot \vec{z}_{k-2} = \ldots = A^k \cdot \vec{z}_0$

ובפרט מהנתון כי $A^k = \underline{\underline{0}}$, בהכרח מתקבל כי:

$\vec{z}_k = A^k \cdot \vec{z}_0 = \vec{0}$

בסתירה להנחה כי A מטריצה הפיכה. **מש"ל**.

.4 תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

4.1אם $A + A^2$ הפיכה אז A הפיכה.

הוכחה: נתון כי $A + A^2 = A(I + A)$ הפיכה. לכן, מכיוון שמכפלה של מטריצות היא מטריצה הפיכה אם ורק אם כל אחת מהמטריצות במכפלה הפיכות, A מטריצה הפיכה.

4.2אם A הפיכה אז $trace(A) \neq 0$.

הפרכה: נפריך את הטענה באמצעות דוגמה נגדית. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה ($A^2 = I$)

אבל $trace(A) = 1 + (-1) = 0$.

4.3אם $A^2 = A$ אז $A = I$ או A אינה הפיכה.

הוכחה: נתון כי $A^2 = A$. צ"ל כי $A = I$ או A אינה הפיכה. אם $A = I$ סיימנו. לכן, נניח כי $A \neq I$. מ"ל: A אינה הפיכה.

אבל, $A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = 0 \Rightarrow A(A - I) = 0$. $A \neq I$ לכן $A - I \neq 0$ לכן, A מטריצה מחלקת אפס. לכן A אינה הפיכה.

4.4אם ב A יש עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.

הוכחה: נניח בשלילה כי A הפיכה. אזי, קיימת B כך ש $BA=I$. אבל, ב A יש עמודת אפסים נניח כי $C_j(A)=0$. לכן, לפי כפל עמודה:

$$
\begin{aligned}
&BA=I \Rightarrow \\
&C_j(BA)=C_j(I) \Rightarrow \\
&BC_j(A)=C_j(I) \Rightarrow \\
&B0=e_j \Rightarrow \\
&0=e_j
\end{aligned}
$$

4.5. סתירה. לכן A אינה הפיכה.

5. עבור המטריצות הבאות A ,

5.1. קבעו האם A הפיכה.

5.2. אם A הפיכה:

5.2.1. מצאו את A^{-1} .

5.2.2. הציגו את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)R_3-2R_1]{(1)R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)R_3-3R_2}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow[(6)R_2-R_3]{(5)R_1+4R_3}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -16 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array}\right)
$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצת היחידה לכן, A הפיכה ו

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 3.5 & 2.5 & -0.5 \\ -2.5 & -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}
$$

נציג את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

נמספר את הפעולות האלמנטריות שביצענו על המטריצה אזי $A^{-1}=E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ ו $A=(A^{-1})^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-2}E_3^{-3}E_4^{-4}E_5^{-5}E_6^{-6}E_7^{-7}$ כאשר E_i המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה ה - i.

לכן,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\7&-1&1\end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&-1&0&1&0\\7&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-7R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-3&-2&1&0\\0&6&-6&-7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-3&-2&1&0\\0&0&0&-3&-2&1\end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל מטריצה עם שורת אפסים לכן לא ניתן לדרג את A למטריצת היחידה.
לכן, A אינה הפיכה.

- $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&-1&5\\2&0&-3\end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)R_3-2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)\frac{R_3}{-\frac{11}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow[(5)R_2-5R_3]{(4)R_1-\frac{1}{3}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{10}{11} & 1 & \frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(6)(-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{11} & -1 & -\frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצת היחידה לכן, A הפיכה ו

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ \frac{10}{11} & -1 & -\frac{15}{11} \\ \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

נציג את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

נמספר את הפעולות האלמנטריות שביצענו על המטריצה אזי $A^{-1} = E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ ו $A = (A^{-1})^{-1} = E_1{}^{-1}E_2{}^{-2}E_3{}^{-3}E_4{}^{-4}E_5{}^{-5}E_6{}^{-6}$ כאשר E_i המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה ה - i.
לכן,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. פתרו את מערכות המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית. אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

6.1 $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 4x-y+5z=6 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$

פתרון: נכתוב

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ונסמן

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

נחפש A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-4R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2+\frac{11}{3}R_3]{R_1+1.5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-0.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצה היחידה לכן, A הפיכה ו

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

לכן נכפול משמאל ב A^{-1} את השוויון

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\vec{b}$$

ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}$$

כלומר, הפתרון למערכת המשוואות הוא:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 6\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

6.2. $\begin{cases}x-4y+z=5\\ 2x-y-2z=3\\ 3x-5y-z=10\end{cases}$

פתרון: נסמן,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 10\end{pmatrix}$$

אזי

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\vec{b}$$

נחפש A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל מטריצה עם שורת אפסים לכן לא ניתן לדרג את המטריצה הנתונה למטריצת היחידה. לכן, A אינה הפיכה.

כלומר, לא ניתן לפתור את מערכת המשוואות באמצעות מציאת מטריצה הופכית.

הערה: העובדה ש A אינה הפיכה משמעה שלמערכת המשוואות הנתונה אין פתרון יחיד. לכן, או שלמערכת אין פתרון או שיש לה אינסוף פתרונות.

נפתור את מערכת המשוואות באמצעות דירוג מטריצות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים שהאיבר המתאים לה בעמודת הפתרון אינו אפס, כלומר קיבלנו את המשוואה

$$0 = 2$$

לכן, אין פתרון למערכת הנתונה.

7. בכל אחד מהסעיפים הנתונים אנו מנסים למצוא מטריצה הפכית ע"י דירוג המטריצה הבאה:

$$\left(A\middle|I\right)$$

לצורה קנונית. וכפי שנוכחנו לגלות - אמ"מ A מטריצה הפיכה, אזי מקבלים לאחר הדירוג:

$$\left(I\middle|A^{-1}\right)$$

a. $$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_2-2R_1\to R_2\\R_3-R_1\to R_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-2&-3&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1+\frac{1}{2}R_2\to R_1\\-\frac{1}{2}R_2\to R_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/2&0&1/2&0\\0&1&3/2&1&-1/2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_1-\frac{1}{2}R_3\to R_1\\R_2-\frac{3}{2}R_2\to R_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&-1/2\\0&1&0&5/2&-1/2&-3/2\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&-1/2\\5/2&-1/2&-3/2\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

b. $$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&4&1&0&0\\1&-1&3&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_1\leftrightarrow R_2\\R_2-2R_1\to R_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&0&1&0\\0&-2&2&1&-2&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right),$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2\leftrightarrow R_3\\R_3+2R_2\to R_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&0&1&-2&2\end{array}\right)$$

בשלב זה אפשר, כמובן, לעצור – שימו לב שלאחר הפעלת מספר פעולות שורה אלמנטריות על A, אנו מקבלים שורת אפסים !
כלומר לא ניתן לדרג את A ע"י פעולות שורה אלמנטריות לצורת מטריצת היחידה ובפרט היא איננה הפיכה !

c. $$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}i&1&1&0\\2&-i&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-i\cdot R_1\to R_1\\R_2-2R_1\to R_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-i&-i&0\\0&i&2i&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_1+R_2\to R_1\\-i\cdot R_2\to R_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&i&1\\0&1&2&-i\end{array}\right)$$

כלומר במקרה זה מתקבל כי A הפיכה, ובפרט:

$$A^{-1}=A=\begin{pmatrix}i&1\\2&-i\end{pmatrix}$$

$$\text{d. } \left(A|I\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&1&-1&0&1&0&0\\1&1&-1&1&0&0&1&0\\1&-1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_2-R_1\to R_2\\R_3-R_1\to R_3\\R_4-R_1\to R_4}]{}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&0&-1&0&1&0\\0&-2&0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2\leftrightarrow R_4\\R_1+\frac{1}{2}R_2\to R_1\\-\frac{1}{2}R_2\to R_2}]{}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1/2&0&0&1/2\\0&1&0&0&1/2&0&0&-1/2\\0&0&-2&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-2&-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_1+\frac{1}{2}R_3\to R_1\\-\frac{1}{2}R_3\to R_3\\R_1+\frac{1}{2}R_4\to R_1\\-\frac{1}{2}R_4\to R_4}]{}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1/2&1/2&1/2&1/2\\0&1&0&0&1/2&0&0&-1/2\\0&0&1&0&1/2&0&-1/2&0\\0&0&0&1&1/2&-1/2&0&0\end{array}\right)$$

כלומר בסה"כ:

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2&1/2\\1/2&0&0&-1/2\\1/2&0&-1/2&0\\1/2&-1/2&0&0\end{pmatrix}$$

8. הערה: שימו לב שכדי להפריך טענה מספיק להראות דוגמא נגדית, בעוד שכדי להוכיח טענה יש לספק הוכחה מלאה !

א. יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר n. אם A הפיכה ו-B איננה הפיכה, אזי $A^{-1}B$ גם כן איננה הפיכה:

זו, כמובן, טענה נכונה – נניח אם כן על דרך השלילה כי $A^{-1}B$ היא מטריצה הפיכה. אזי מהעובדה כי מכפלת מטריצות הפיכות היא הפיכה גם כן, מתקיים כי המטריצה C המוגדרת ע"פ:

$$C:=A\cdot\left(A^{-1}B\right)$$

היא מטריצה הפיכה. מצד שני מאסוציאטיביות כפל המטריצות מתקיים כי:

$$A\cdot\left(A^{-1}B\right)=\underbrace{\cancel{\left(AA^{-1}\right)}}_{I}B=B$$

כלומר, $C=B$, ולכן מהנתון כי B איננה הפיכה גם C איננה הפיכה בסתירה להנחת היסוד שלנו. **מש"ל.**

הערה: בהוכחה זו אנו מתבססים על העובדה שמכפלת מטריצות ריבועיות, $A\cdot B$, היא מטריצה ריבועית הפיכה אמ"מ גם A וגם B הפיכות.
למעשה הוכחנו טענה זו בתרגול, כשהוכחנו שמכפלת מטריצות ריבועיות, $A\cdot B$, איננה מטריצה ריבועית הפיכה אמ"מ או A לא הפיכה או B לא הפיכה (או שתיהן).

ב. אם A ו-B מטריצות הפיכות מאותו סדר ו-$A+B\neq\underline{0}$, אזי $A+B$ גם כן הפיכה:

זו, כמובן, טענה לא נכונה – נתבונן בזוג המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

כאמור $A=I$ ולכן הפיכה, וקל לראות שאת B ניתן בקלות להעביר למטריצת היחידה, I, ע"י הפעלת פעולות שורה אלמנטריות. כלומר, B שקולת שורה ל-I ובפרט הפיכה. בהתאמה המטריצות שבחרנו מקיימות את הדרישה, $A+B\neq \underline{\underline{0}}$:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq \underline{\underline{0}}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

אבל ל-C יש שורת אפסים, כלומר לא ניתן להעביר אותה למטריצת היחידה, I, ע"י הפעלת פעולות שורה אלמנטריות. מכאן, ש-C איננה שקולת שורה ל-I ובפרט איננה הפיכה. **מש"ל**.

ג. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. אם לכל זוג וקטורים שונים, $\vec{x}\neq\vec{y}$, מתקיים כי $A\cdot\vec{x}\neq A\cdot\vec{y}$, אזי A מטריצה הפיכה.

זו טענה נכונה – נניח, אם כן, על דרך השלילה כי A איננה מטריצה הפיכה, אזי קיים ווקטור עמודה, $\vec{z}\neq\vec{0}$, עבורו מתקיים כי:

$$A\cdot\vec{z}=\vec{0}$$

כאמור, כל מטריצה A מקיימת כי:

$$A\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

לכן ביחס לבחירה:

$$\vec{x}=\vec{z}\ \ and\ \ \vec{y}=\vec{0}\ \Rightarrow\ A\cdot\vec{x}=\vec{0}=A\cdot\vec{y}$$

מצד שני מהבחירה שלנו, $\vec{x}=\vec{z}\neq\vec{0}=\vec{y}$, כלומר מתקבלת סתירה לנתון כי:

$$\forall\vec{x}\neq\vec{y}\ \rightarrow\ A\cdot\vec{x}\neq A\cdot\vec{y}$$

ולכן A חייבת להיות הפיכה. **מש"ל**.