אוניברסיטת בר אילן, המחלקה למתמטיקה

בוחן בקורס: משוואות דיפרנציאליות לכלכלנים 88-625-01

מרצה הקורס: ד"ר יעקוב קרסנוב
מתרגל הקורס: ד"ר אפי כהן

סמסטר א, תשע"ה ו בטבת תשע"ה, 28.12.14

משך הבוחן: שעה וחצי

חומר עזר מותר ללא הגבלה אך השימוש במחשב נייד\טאבלט אסור בהחלט.

יש לענות **בפירוט** על 3 מתוך 4 השאלות.
אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 3 שאלות לבדיקה,
אחרת תיבדקנה 3 השאלות הראשונות.
כל השאלות שוות משקל. נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות.

שאלה 1

א. מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר $y' = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}$.

ב. הסבר מדוע למשוואה מסעיף א עם תנאי השפה $y(3) = -1$ יש פתרון יחיד,
מצא את הפתרון ובדוק את תשובתך ע"י הצבה במשוואה המקורית.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נשתמש בשיטת הפרדת המשתנים $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2} \Leftarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{y}\left(1+\sqrt[3]{y}\right)} = dx$.

נבצע את פעולת האינטגרל לאגף שמאל: נציב $y = t^3 \Leftarrow dy = 3t^2 dt$

$$\int \frac{3t^2 dt}{t(1+t)} = \int \frac{3t dt}{t+1} = \int \left(3 - \frac{3}{t+1}\right) dt = 3t - 3\ln|t+1| = 3\sqrt[3]{y} - 3\ln\left|\sqrt[3]{y} + 1\right|$$

הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית הוא $3\sqrt[3]{y} - 3\ln\left|\sqrt[3]{y} + 1\right| = x + c$.

סעיף ב

נשים לב ש $f(x,y) = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}$ פונקציה רציפה בכל המישור והנגזרת $f'_y(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ רציפה בסביבת הנקודה $(3,-1)$. לא ניתן להגיע לפתרון בעזרת הפתרון הכללי. הפתרון הוא הפונקציה הקבוע $y = -1$. הצבה באגף שמאל של המשוואה תיתן $y' = 0$ ומאגף ימין נקבל $\sqrt[3]{(-1)} + \sqrt[3]{(-1)^2} = 0$. קיבלנו פסוק אמת.

שאלה 2

א. מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר $y'+y=\frac{1}{\left(1-e^{6x}\right)y^2}$

ב. מצאו פתרון למשוואה $y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ עם תנאי ההתחלה $y(3)=4$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

נפתור את המשוואה $y^2y'+y^3=\frac{1}{1-e^{6x}}$.

נציב $t=y^3 \Rightarrow t'=3y^2y'$ ונקבל $\frac{t'}{3}+t=\frac{1}{1-e^{6x}}$.

קיבלנו משוואה ליניארית. נפתור את המשוואה ההומוגנית $\frac{t'}{3}+t=0$ ע"י שיטת הפרדת המשתנים $\frac{t'}{3}=-t \Rightarrow \frac{dt}{t}=-3dx \Rightarrow t=ce^{-3x}$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית $\frac{t'}{3}+t=\frac{1}{1-e^{6x}}$.

הפתרון הוא מהצורה $t=c(x)e^{-3x} \Rightarrow t'=c'(x)e^{-3x}-3c(x)e^{-3x}$.

נציב במשוואה $\frac{t'}{3}+t=\frac{1}{1-e^{6x}}$ ונקבל

$$\frac{c'(x)e^{-3x}}{3}=\frac{1}{1-e^{6x}} \Rightarrow c'(x)=\frac{3e^{3x}}{1-e^{6x}} \Rightarrow c(x)=\int\frac{3e^{3x}}{1-e^{6x}}dx .$$

נציב $u=e^{3x} \Rightarrow du=3e^{3x}dx$ נשאר לפתור את האינטגרל

$$\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{(1+u)(1-u)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}=\frac{1}{2}\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln|1-u|=\ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|}=\ln\sqrt{\left|\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right|}$$

הפתרון הפרטי הוא $t=\ln\sqrt{\left|\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right|}\cdot e^{-3x}$.

הפתרון הכללי הוא $t=ce^{-3x}+\ln\sqrt{\left|\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right|}\cdot e^{-3x} \Rightarrow y^3=ce^{-3x}+\ln\sqrt{\left|\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right|}\cdot e^{-3x}$.

סעיף ב

נשים לב שהמשוואה $y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ היא משוואה הומוגנית מסדר ראשון.

נציב $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$ במשוואה $y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ונקבל

$$u'x+u=\frac{ux-\sqrt{x^2+u^2x^2}}{x} \Rightarrow u'x+u=u-\sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'x=-\sqrt{1+u^2}$$

נפתור את המשוואה $u'x=-\sqrt{1+u^2}$ בעזרת שיטת הפרדת המשתנים

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{c}{x}\Leftarrow u+\sqrt{1+u^2}=\frac{c}{x}\Leftarrow \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln\frac{1}{x}+\ln c\Leftarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$$

סה"כ נקבל $y+\sqrt{x^2+y^2}=c$.

נתון ש $y(3)=4$, ולכן $c=9$.

$y+\sqrt{x^2+y^2}=9$.

<u>שאלה 3</u>

א. מצא פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית $2x^2y''+6xy'+2y=0$.

ב. מצא פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית $\left(2x^2+4x+2\right)y''+\left(6x+6\right)y'+2y=0$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

הפתרון הוא מהצורה $y=x^r \Rightarrow y'=rx^{r-1} \Rightarrow y''=r(r-1)x^{r-2}$.

נציב במשוואה $2x^2y''+6xy'+2y=0$ ונקבל

$2r(r-1)x^r+6rx^r+2x^r=0 \Rightarrow 2r^2+4r+2=0 \Rightarrow (r+1)^2=0$.

קיבלנו $r=-1$ בריבוי 2, ולכן הפתרון הכללי הוא $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2\ln|x|}{x}$.

<u>סעיף ב</u>

נשים לב שניתן לרשום את המשוואה באופן הבא:

$2(x+1)^2y''+6(x+1)y'+2y=0$.

$y=(x+1)^r$

וכמו בסעיף א נקבל שהפתרון הכללי הוא $y=\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2\ln|x+1|}{x+1}$.

<u>שאלה 4</u>

א. מצא פתרון כללי למערכת המשוואות $\begin{cases} y_1'=3y_1-2y_2 \\ y_2'=8y_1+3y_2 \end{cases}$.

ב. מצא פתרון פרטי למערכת המשוואות $\begin{cases} y_1'=3y_1-2y_2-25 \\ y_2'=8y_1+3y_2 \end{cases}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

$(\lambda-3)^2+16=\left|\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -8 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right|=|\lambda I-A| \Rightarrow \lambda=3\pm 4i$.

נמצא את הווקטור העצמי עבור $\lambda=3+4i$ ז"א למצוא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{pmatrix}$. הבסיס הוא $\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$.

הפתרון הוא מהצורה $\begin{matrix} y_1=e^{3x}\left(i\cos(4x)-\sin(4x)\right)\Leftarrow y_1=ie^{3x}\left(\cos(4x)+i\sin(4x)\right) \\ y_2=e^{3x}\left(2\cos(4x)+2i\sin(4x)\right)\Leftarrow y_2=2e^{3x}\left(\cos(4x)+i\sin(4x)\right) \end{matrix}$.

הפתרון הכללי $\begin{array}{l} y_1 = -c_1 e^{3x} \sin(4x) + c_2 e^{3x} \cos(4x) \\ y_2 = 2c_1 e^{3x} \cos(4x) + 2c_2 e^{3x} \sin(4x) \end{array}$

<u>סעיף ב</u>

נפתור בעזרת שיטת הניחוש: נניח שפונקציות הפתרון הפרטי הן פונקציות קבועות $y_1 = c, y_2 = d$.

נציב במשוואה המקורית $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - 25 \\ y_2' = 8y_1 + 3y_2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 0 = 3c - 2d - 25 \\ 0 = 8c + 3d \end{cases} \Leftarrow y_1 = 3, y_2 = -8$.