פתרון תרגיל בית מספר 2

<u>שאלה 1</u>

א. נוכיח שלכל $x \in X$, $\{x\}$ היא קבוצה סגורה בשתי דרכים:

<u>דרך סדרות</u>- קבוצה סגורה במ"מ אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. ברור שהסדרה היחידה שמוכלת ב-$\{x\}$ היא הסדרה הקבועה שגבולה הוא, כמובן, $x \in \{x\}$.

<u>דרך נוספת</u> - נראה ש $X \setminus \{x\}$ פתוחה. תהי $y \in X \setminus \{x\}$. יהי $\varepsilon = d(x,y)$. ברור ש $\varepsilon > 0$ כי $x \neq y$. נראה שמתקיים $B(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$. אם $z \in B(y,\varepsilon)$ אזי $\varepsilon > d(z,y)$. לכן, $z \neq x$ (כי $\varepsilon = d(x,y)$). מכאן $z \in X \setminus \{x\}$ וקיבלנו הדרוש.

ב. נניח ש-A תת קבוצה סופית של X. אם $A = \varnothing$ ברור ש A סגורה. אחרת, תהי $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 1$). מתקיים $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$. עפ"י סעיף א' לכל $1 \leq i \leq n$ $\{x_i\}$ סגורה. מכיון שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה נקבל ש A סגורה.

<u>שאלה 2</u>

נניח $\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ $x_n \to x$ ונניח בשלילה ש $x \notin B[a,r]$. מכיון ש $x \notin B[a,r]$ אזי $d(x,a) > r$ לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $d(x,a) = r + \varepsilon$. $x_n \to x$ ולכן לכל $\varepsilon' > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon' = \varepsilon$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n, x) < \varepsilon$.

לכן $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon$ ומכיון ש$\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ נקבל ש $d(x_{n_0}, a) \leq r$ ולכן מאי שויון המשולש נקבל $d(x,a) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x_{n_0}, a) < r + \varepsilon$ בסתירה לכך ש $d(x,a) = r + \varepsilon$.

דרך אחרת (שימוש בכלים מאינפי1): נראה שאם $x_n \to x$ כאשר $\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ אז $x \in B[a,r]$.

מתקיים: $0 \leq d(x_n, a) \leq r$ זוהי סדרת מספרים חסומה ב $\mathbb{R}$ עפ"י בולצנו ויישטראס קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ כך ש $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, a)$ קיים. יתרה מכך מכיון ש $d(x_n, a) \leq r$ נסיק $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, a) \leq r$.

נתון $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ לכן $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, x) = 0$.

כעת, לכל k מתקיים $d(x,a) \leq d(x, x_{n_k}) + d(a, x_{n_k})$ מכאן

$$d(x,a) \leq \lim_{k \to \infty} \left(d(x, x_{n_k}) + d(a, x_{n_k}) \right) = \lim_{k \to \infty} d(x, x_{n_k}) + \lim_{k \to \infty} d(a, x_{n_k}) \leq r.$$

<u>שאלה 3</u>

א. 1. $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow \tilde{d}(x,y)=0$.

2.מהסימטריות של המטריקה d נקבל $\tilde{d}(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=\tilde{d}(y,x)$

לכל $x,y\in X$.

3. א. על מנת להוכיח אי שוויון המשולש של מטריקה $\tilde{d}$ יש להראות את אי השוויון

$\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\le\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\dfrac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$ לכל $x,y,z\in X$.

<u>שלב א</u>: אם $0\le a,b$ ו- $a\le b$ אזי $\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b}$.

הוכחה: אכן,

$\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b} \Leftrightarrow a\left(1+b\right)\le b\left(1+a\right) \Leftrightarrow a+ab\le b+ab \Leftrightarrow a\le b$.

<u>שלב ב</u>: אם $0\le a,b,c$ ו- $a\le b+c$ אזי $\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

הוכחה: אכן, $\dfrac{a}{1+a}\underset{stage\ a}{\le}\dfrac{b+c}{1+b+c}=\dfrac{b}{1+b+c}+\dfrac{c}{1+b+c}\le\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

<u>שלב ג</u>: בצעו את ההצבה המתאימה על מנת להשלים את ההוכחה.

ב. $\tilde{d}(x,y)<1$

ג. נניח $\{x_n\}\xrightarrow{d}x$. נקבל

$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}=\dfrac{0}{1+0}=0\Rightarrow\{x_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}x$.

מצד שני $d(x,y)=\dfrac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}$. לכן אם $\{y_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}y$ נקבל

$\lim_{n\to\infty}d(y_n,y)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\tilde{d}(y_n,y)}{1-\tilde{d}(y_n,y)}=\dfrac{0}{1-0}=0\Rightarrow\{y_n\}\xrightarrow{d}y$.

לכן המטריקות שקולות.

ד. . מתקיים $d(x_n,x)\ge\rho(x_n,x)\ge 0$. לכן אם $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ אז ממשפט הסנדביץ' $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$. נניח $\rho(x_n,x)=\min\{1,d(x_n,x)\}\xrightarrow{n\to\infty}0$. אזי לכל $1>\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $\rho(x_n,x)=\min\{1,d(x_n,x)\}<\varepsilon$. מכיון ש $1>\varepsilon$ נקבל ש $d(x_n,x)\}<\varepsilon$ לכל שלכל $n\ge n_0$. מכאן ניתן להסיק ש $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. לכן המטריקות שקולות.

<u>שאלה 4</u>

א. $k(a^n,0)=\max\{i:\ a^i \mid (a^n-0)\}=n \Rightarrow d_a(a^n,0)=\frac{1}{a^n}\underset{n\to\infty}{\to}0 \Rightarrow a^n \xrightarrow{d_a} 0$

ב. עפ"י א' $\{7^n\}\xrightarrow{d_7}0$ אבל $\{7^n\}\overset{d_5}{\not\to}0$ שכן $d_5(7^n,0)=1\underset{n\to\infty}{\not\to}0$. מכאן ש d_5 ו- d_7 אינן שקולות.

ג. בתרגיל 1 (שאלה 5) הוכחתם כי במ"מ דיסקרטי הסדרות היחידות המתכנסות הן אלה שקבועות לבסוף. עפ"י סעיף אי $\{8^n\}$ סדרה שאינה קבועה לבסוף המתכנסת מעל $\mathbb{Z}$ לפי המטריקה d_8. מכאן , d_8 לא שקולה למטריקה הדיסקרטית מעל $\mathbb{Z}$. נוכיח שהמטריקה הסטנדרטית שקולה לדיסקרטית (ולכן לא שקולה ל d_8) מעל $\mathbb{Z}$. מ"ל שכל סדרה המתכנסת ב מ"מ $(\mathbb{Z},|\ |)$ קבועה לבסוף. נניח ש $x_n\to x$ אזי ניקח $\varepsilon=1$ ומתקיים שקיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ $d(x_n,x)<1$. מכאן בהכרח (המרחק המינימלי בין נקודות שונות של $\mathbb{Z}$ הוא 1), לכל $n\ge n_0$ $x_n=x$ והוכחנו הדרוש.

<u>שאלה 5</u>

א. תהי U פתוחה ב-(Y,ρ_2) . מכיון ש ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y נקבל U פתוחה ב-(Y,ρ_1) . $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה וכן U פתוחה ב-(Y,ρ_1) ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב(X,d_1). d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה גם ב (X,d_2).
קיבלנו שלכל U פתוחה ב-(Y,ρ_2) $f^{-1}(U)$ פתוחה ב (X,d_2) ומכאן $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

ב. הפרכה ע"י דוגמא נגדית ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d_1 מטריקה דיסקרטית , $d_2=\rho_1=\rho_2$ מטריקה סטנדרטית ב- $\mathbb{R}$ (מטריקה המושרית מערך מוחלט). נקבל שכל פונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ היא רציפה מכיון שכל תת קבוצה ב (X,d_1) היא פתוחה (למה?) אבל ניתן למצוא f כך ש $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ אינה רציפה, למשל,

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}.$$

<u>שאלת בונוס</u>

א. קל להוכיח הדרוש באמצעות משפט הסנדביץ' והעובדה שלכל מטריקה μ מעל X מתקיים $x_n\xrightarrow{\mu}x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mu(x_n,x)=0$.

ב. ראינו ב4 ג' שתי מטריקות שקולות מעל $\mathbb{Z}$. המטריקה הסטנדרטית המושרית מ $\mathbb{R}$ וכן מטריקת 0-1 (המטריקה הדיסקרטית). הן אינן שקולות במובן ליפשיץ שכן אחרת קיים $c>0$ כך ש $\forall x,y\in\mathbb{Z}\quad cd_{\Delta}(x,y)\geq |x-y|$.

בפרט, $\forall x\neq y\in\mathbb{Z}\quad c=c\cdot 1=cd_{\Delta}(x,y)\geq |x-y|$. זה כמובן לא יתכן (מדוע?) ולכן קיבלנו סתירה. כלומר המטריקות אינן שקולות במובן ליפשיץ.