סיכום הרצאות אינפי 4
על פי הרצאות של פרופ' שחר נבון, תשפ"ג סמסטר ב

ניר בן־ארי

תוכן עניינים

1 מסילות ב־$\mathbb{R}^n$

1.0.1 הגדרה <u>מסילה</u> היא העתקה רציפה מקטע סגור ל־$\mathbb{R}^n$. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

1.0.2 הגדרה מסילה נקראת <u>סגורה</u> אם $\gamma(a) = \gamma(b)$

1.0.3 הגדרה מסילה נקראת <u>פשוטה</u> אם היא חח"ע (לא כולל הקצוות)

1.0.4 דוגמות

1. מסילה קבועה: $\gamma(t) = \bar{a}$, עבור $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$
2. קטע: $\gamma(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$, עבור $\bar{a} \neq \bar{b} \in \mathbb{R}^n$
3. מעגל: $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$
4. גרף של פונקציה: הגרף של פונקציה רציפה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ניתן לתיאור על ידי המסילה $\gamma(t) = (t, f(t))$ כאשר $a \leq t \leq b$
5. מסילה פוליגונלית: אם $P = \{t_i\}_{i=0}^k$ חלוקה של $[a,b]$ $(P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b)$ ו־γ מסילה על $[a,b]$ כך שלכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ היא מסילת קטע, אז γ נקראת מסילה פוליגונלית
6. דוגמה למסילה ב־$\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (cost, sint, t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$ (גליל)

1.0.5 הגדרה <u>המסילה הנגדית, $-\gamma$</u> מוגדרת כ־ $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ כאשר $-b \leq t \leq -a$.
הגדרה נוספת $(-\gamma)(t) = \gamma(b - (t-a))$ כאשר $a \leq t \leq b$

1.0.6 הגדרה תהי $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה. מסילה γ_2, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ נקראת <u>שקולה</u> ל־γ_1 $(\gamma_1 \sim \gamma_2)$ אם יש פונקציה h, $h : [c,d] \to [a,b]$ עולה ועל כך ש־ $\gamma_2(s) = \gamma_1(h(s))$

1.0.7 טענה זהו יחס שקילות

1.0.8 הגדרה אם h כנ"ל יורדת ועל אז γ_2 נקראת <u>אנטי שקולה</u> ל־γ_1

1.0.9 הערה זהו לא יחס שקילות

1.0.10 הגדרה תהיינה γ_1, γ_2 שתי מסילות ב־$\mathbb{R}^n$. $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ומתקיים $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. <u>ההדבקה</u> שלהן, $\gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$, מוגדרת כך:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(c+t-b) & b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

1.1 אורך של מסילה

1.1.1 הגדרה תהי מסילה γ על $[a,b]$ ותהי $P=\{t_i\}_{i=0}^k$ חלוקה של $[a,b]$. אומרים ש־γ בעלת אורך אם הסופרימום הבא סופי:

$$L(\gamma)=sup\{\sum_{i=1}^{k}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|:[a,b] \text{ חלוקה של } P\}$$

אז $L(\gamma)$ מוגדר להיות אורך המסילה γ.

1.1.2 הערה אם ה־sup הנ"ל ∞ אז ניתן לומר שאורך γ אינסופי, ונסמן $L(\gamma)=\infty$.

1.1.3 דוגמות

1. אורך קטע הוא $\|\bar{b}-\bar{a}\|$
2. אורך של מסילה פוליגונלית הוא $\sum_{i=1}^k\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$
3. מעגל הוא בעל אורך
4. אם γ_2 שקולה ל־γ_1 או אנטי שקולה לה, אז $L(\gamma_1)=L(\gamma_2)$. זה נכון גם במקרה שהאורך אינסופי.

1.1.4 טענה γ בעלת אורך $\Longleftrightarrow$ קיים במובן הצר הגבול $\lim_{\lambda(P)\to 0}L(P)$ ובמקרה זה הגבול הוא $L(\gamma)$.

1.2 מסילות וגזירותן

1.2.1 הגדרה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נקראת גזירה ב־$t_0\in[a,b]$ אם (כרגיל) קיים

$$\lim_{t\to 0}\frac{\gamma(t_0+t)-\gamma(t_0)}{t}$$

1.2.2 הערה γ היא פונקצייה וקטורית ולכן ההגדרה הנ"ל שקולה לגזירות ב־t_0 של $x_1(t),\dots,x_n(t)$.

1.2.3 הערה משמעות הוקטור $\gamma'(t_0)$ (אם הגבול קיים): כיוונו הוא כיוון התקדמות המסילה ב־t_0, וגודלו, $\|\gamma'(t_0)\|$, הוא קצב ההתקדמות בכיוון זה.

1.3 דרגות נחמדות של מסילה

1.3.1 הגדרה אם γ' רציפה רכיב רכיב אז γ נקראת גזירה ברציפות.

1.3.2 הגדרה γ נקראת גזירה ברציפות למקוטעין אם יש חלוקה של $[a,b]$, $\{t_i\}_{i=0}^k$ כך ש־γ גזירה ברציפות ב־$[t_{i-1},t_i]$ לכל $1\leq i\leq k$.

1.3.3 הערה פירוש ההגדרה הנ"ל היא שבכל נקודה מה־t_i־ים γ גזירה מימין ומשמאל, אך נגזרות אלו לא בהכרח שוות.

1.3.4 הגדרה מסילה γ נקראת חלקה אם היא גזירה ברציפות, $\gamma' \neq \bar{0}$ והיא חח"ע.

1.3.5 הערה כאשר המסילה חלקה אז (באופן מקומי) ישנו (לפחות) אחד מרכיבי המסילה אשר את שאר רכיביה ניתן להציג כגרף גזיר ברציפות שלו.

1.3.6 דוגמה מסילה סגורה אינה חלקה.

1.3.7 הגדרה γ נקראת חלקה למקוטעין אם יש חלוקה של $[a,b]$ $\{t_i\}_{i=0}^k$ כך ש־γ חלקה ב־$[t_{i-1},t_i]$ לכל $1\leq i\leq k$.

1.4 חישוב אורך מסילה ע"י אינטגרציה

1.4.1 משפט אם γ מסילה גזירה ברציפות אז היא בעלת אורך ואורכה הוא $L(\gamma)=\int_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

1.4.2 משפט אם γ בעלת אורך ו־$[c,d]\subseteq[a,b]$ אז $\gamma_{[c,d]}$ בעלת אורך.

1.4.3 משפט אדטיביות האורך: אם γ בעלת אורך, $a<c<b$, אז $L(\gamma)=L(\gamma_{[a,c]})+L(\gamma_{[c,b]})$

1.4.4 הערה גם ההפך הוא הנכון: אם לנקודה כלשהי c, $a<c<b$, $\gamma_{[a,c]},\gamma_{[c,b]}$ בעלות אורך, אז גם $\gamma=\gamma_{[a,b]}$ בעלת אורך, והשוויון הנ"ל מתקיים.

1.4.5 הערה המשפט וההערה הנ"ל נכונים גם במקרה שיש יותר מנקודת ביניים אחת (אבל מספר סופי).

1.4.6 מסקנה אורך מסילה γ גזירה ברציפות למקוטעין הוא $L(\gamma)=\int_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

1.4.7 דוגמות

1. אורך מסילה $\gamma(\theta)=(r(\theta)cos\theta,r(\theta)sin\theta)$ הוא: $\int_a^b\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}$
2. אם $f'(x)$ רציפה ב־$[a,b]$ אז אורך המסילה $\gamma(t)=(t,f(t))$, $a\leq t\leq b$ שמתארת את גרף הפונקציה הוא $\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}$

1.4.8 טענה למסילות שקולות ואנטי־שקולות אותו אורך (סופי או אינסופי).

1.5 פונקציות בעלות השתנות חסומה

1.5.1 הגדרה פונקציה f על $[a,b]$ נקרת בעלת השתנות חסומה אם $sup\{\sum_{i=1}^{k}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|$: כל החלוקות$\}$ סופי, ובמקרה זה ה־sup נקרא ההשתנות של f על $[a,b]$ ומסמנים אותו $V_a^b f$.

1.5.2 טענה $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ בעלת אורך ב־$[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ $x(t),y(t)$ שתיהן בעלות השתנות חסומה ב־$[a,b]$.

2 אינטגרלים מסילתיים

2.1 אינטגרל מסילתי מסוג ראשון - אינטגרל לפי אורך המסילה

2.1.1 הגדרה תהי γ מסילה בעלת אורך ותהי f פו' ממשית המוגדרת על תמונת γ. תהי P חלוקה של $[a,b]$, אז נסמן את אורך $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ ב־Δs_i. אם קיים הגבול $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\zeta_i))\Delta s_i$ (כאשר $t_{i-1}\le\zeta_i\le t_i$), אז אומרים ש־f אינטגרבילית ביחס לאורך γ ומסמנים את הגבול כ־$\int_\gamma f\ ds$.

2.1.2 טענה אם γ בעלת אורך אז $max_{\lambda(P)\to 0}\Delta s_i\to 0$.

2.1.3 טענה אם קיים $\int_\gamma fds$ אז f חסומה על γ.

2.1.4 טענה ניתן להגדיר את האינטגרל ביחס לאורך מסילה גם בדרך הבאה:

$$\int_\gamma fds=\lim_{\lambda(P)\to 0^+}\sum f(\gamma(\zeta_i))\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$

כלומר מחליפים את Δs_i באורך הקטע שבין קצותיו.

2.1.5 טענה לינאריות: אם f,h אינטגרביליות ביחס לאורך γ אז כך גם $\alpha f+\beta h$ ומתקיים: $\int_\gamma(\alpha f+\beta h)ds=\alpha\int_\gamma fds+\beta\int_\gamma hds$.

2.1.6 טענה אם f אינטגרבילית ביחס לאורך γ ואם $|f|\le M$ על γ אז

$$|\int_\gamma fds|\le M\cdot L(\gamma)$$

2.2 אינטגרל לפי האורך ושקילות מסילות

2.2.1 משפט אם f אינט' ביחס לאורך $\gamma(t)$ אז f אינט' ביחס לאורך $\tilde{\gamma}$ אם $\tilde{\gamma}(s)$ שקולה או אנטי־שקולה ל־$\gamma(t)$.

2.2.2 משפט אם γ גזירה ברציפות למקוטעין ו־f רציפה על γ, אז f אינט' ביחס לאורך γ ומתקיים: $\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$.

2.2.3 משפט אם f רציפה על γ בעלת אורך אז קיים $\int_\gamma f ds$.

2.2.4 טענה אם f אינט' ביחס לאורך $\gamma(t)$ והאינטגרל $\int_\gamma f dt$ קיים, וגם $\tilde{\gamma}(s)$ שקולה או אנטי־שקולה ל־$\gamma(t)$ אזי $\int_\gamma f dt = \int_{\tilde{\gamma}} f ds$.

2.2.5 משפט תהי γ בעלת אורך ו־f אינט' ביחס לאורך γ. תהי c, $a < c < b$, אז f אינט' לפי האורך על $\gamma_{[c,b]}, \gamma_{[a,c]}$ ומתקיים: $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_{[a,c]}} f ds + \int_{\gamma_{[c,b]}} f ds$

2.3 הדיפרנציאל

2.3.1 הגדרה אם Ω תחום ב־$\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ נקראת <u>דיפרנציאבילית ב־$x_0 \in \Omega$</u>, אם מתקיים:

$$f(\bar{x_0} + \bar{x}) = f(\bar{x_0}) + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n + \epsilon(\bar{x})||\bar{x}||$$

כאשר $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $A_1, \ldots, A_n$ קבועים, ו־$\epsilon(\bar{x})$ היא פונקציה המקיימת $\lim_{x\to 0} \epsilon(\bar{x}) = 0$.

2.3.2 הערה מקובל להציג את המחובר הימני ($\epsilon(\bar{x})$) גם כ־$O(||\bar{x}||)$.

2.3.3 טענה לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x_0})$.

2.3.4 הגדרה <u>הדיפרנציאל של f ב־$\bar{x_0}$</u> הוא:

$$df_{\bar{x_0}}(\bar{\zeta}) \underbrace{=}_{\text{סימון נוסף}} df(\bar{x_0})(\bar{\zeta}) = f'_{x_1}(\bar{x_0})\zeta_1 + \cdots + f'_{x_n}(\bar{x_0})\zeta_n$$

כאשר $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$.

2.3.5 הערה $df_{\bar{x_0}}$ נקרא <u>פונקציונל לינארי</u>.

2.3.6 טענה $df_{\bar{x_0}}(\bar{\zeta}) = < \nabla f(\bar{x_0}), \bar{\zeta} >$.

2.3.7 הערה ניתן לכתוב את הדיפרנציאל גם כך:

$$df = f'_{x_1}dx_1 + \cdots + f'_{x_n}dx_n$$

2.4 תבניות דיפרנציאליות לינאריות

2.4.1 הגדרה אם $w_1(\bar{x}),\dots,w_n(\bar{x})$ הן פונקציות ממשיות רציפות בתחום $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ אז

$$W = w_1(\bar{x})dx_1 + \cdots + w_n(\bar{x})dx_n$$

נקראת תבנית דיפרנציאלית לינארית (מסדר 1).

2.4.2 הערה זהו אופרטור במתאים לכל נקודה $\bar{x} \in \Omega$ את הפונקציונל הלינארי

$$\Phi(\bar{\zeta}) = < (w_1(\bar{x}),\dots,w_n(\bar{x})), \bar{\zeta} >$$

2.4.3 הערה אם f גזירה ברציפות אז הדיפרנציאל הוא תבנית לינארית דיפרנציאלית.

2.4.4 הגדרה שדה וקטורי הוא תיאור מקובל של תבניות דיפ'.

2.5 אינטגרל מסילתי מסוג שני - אינטגרל לפי הרכיבים

2.5.1 הגדרה תהי γ מסילה ב־$\mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$. תהי f ממשית שמוגדרת על תמונת γ ויהי j, $1 \le j \le n$. אומרים ש־f אינטגרבילית ביחס לרכיב ה־j (או ביחס ל־x_j), אם קיים הגבול

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\zeta_i))(\gamma_j(t_i) - (\gamma_j(t_{i-1}))$$

(עם הסיומנים הרגילים - P חלוקה, ζ_i נקודות ביניים וכו')
במקרה זה מסמנים את הגבול כ־ $\int_\gamma f(\bar{x})dx_j$.

2.5.2 משפט נניח f אינט' ביחס לרכיב j של γ, אז אם $\hat{\gamma}$ שקולה ל־γ אז f אינט' ביחס לרכיב j של $\hat{\gamma}$ ומתקיים $\int_\gamma f dx_j = \int_{\hat{\gamma}} f ds_j$.
אם $\tilde{\gamma}$ אנטי־שקולה ל־γ אז f אינט' ביחס לרכיב j של $\tilde{\gamma}$ ומתקיים $\int_\gamma f dx_j = -\int_{\tilde{\gamma}} f ds_j$.

2.5.3 משפט תהי $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ מסילה. $1 \le j \le n$ כלשהו, ו־γ_j' רציפה על $[a,b]$ (או למקוטעין), ו־f רציפה על γ. אז f אינט' ביחס לרכיב j של γ ומתקיים

$$\int_\gamma f dx_j = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt$$

2.5.4 משפט אם γ בעלת אורך ו־f רציפה על γ אז f אינט' ביחס לכל x_j.

2.5.5 הגדרה אם f פו' וקטורית על מסילה γ, $f = (f_1, \dots, f_n)$ (f_i ממשיות לכל $1 \le i \le n$) אז אומרים ש־f אינטגרבילית ביחס ל־γ אם לכל $1 \le j \le n$ f_j אינט' ביחס ל־x_j ואז הסכום

$$\int_\gamma f \cdot \vec{dx} := \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j dx_j$$

נקרא האינטגרל המסילתי השלם של f ביחס ל־γ.

2.5.6 הערה אם f רציפה, ניתן לראות זאת כאינטגרל של התבנית הדיפרנציאלית $f_1dx_1 + \dots + f_ndx_n$ לאורך γ.

2.5.7 הערה כל טענה לגבי אינטגרציה לפי רכיב j ניתן להפוך לטענה על האינטגרל השלם, במקרה והתנאים מתקיימים לכל j, $1 \le j \le n$.

2.5.8 משפט אם γ גזירה ברציפות ו־f רציפה על γ, אז האינטגרל המסילתי השלם של f קיים והוא:

$$\int_\gamma f\vec{dx} = \int_a^b [f_1(\gamma(t)) + \dots + f_n(\gamma(t))]dt$$

2.5.9 טענה תכונות של האינטגרל המסילתי מסוג שני:

1. אם f, h אינט' ביחס לרכיב ה־j של γ, α, β קבועים, אז גם $\alpha f + \beta h$ אינט' ומתקיים
$$\int_\gamma (\alpha f + \beta h)dx_j = \alpha \int_\gamma f dx_j + \beta \int_\gamma f dx_j$$
2. נניח $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ מסילות. $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. אז f אינט' ביחס לרכיב ה־j של γ_1 ושל γ_2 $\iff$ f אינט' ביחס לרכיב ה־j של $\gamma_1 + \gamma_2$ (כהדבקת מסילות) ומתקיים:
$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dx_j = \int_{\gamma_1} f dx_j + \int_{\gamma_2} f dx_j$$

2.6 הגרדיינט כפונקציה קדומה

2.6.1 משפט נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n = (f_1,\dots,f_n)$ מוגדרת בתחום D, נניח שיש פונקציה ממשית F, $F\in C^1(D)$ כך ש $\nabla F = f$. תהי γ גזירה ברציפות ב־D, אז

$$\int_\gamma f\cdot\vec{dx} = \int_\gamma (f_1dx_1+\dots+f_ndx_n) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

2.6.2 טענה פונקציה קדומה לפו' f, אם קיימת, היא יחידה עד כדי קבוע.

2.6.3 הערה ניתן להראות שהמשפט נכון גם עבור מסילות בעלות אורך.

3 תבניות דיפרנציאליות

3.0.1 הגדרה תבנית דיפרנציאלית ב־D $w = w_1dx_1+\dots+w_ndx_n$ נקראת <u>מדוייקת</u> אם יש F גזירה ברציפות ב־D כך ש־$\nabla F = (w_1,\dots,w_n)$. במקרה זה, w נקראת גם <u>דיפרנציאל שלם של F</u>, dF. כשדה וקטורי, $(w_1,\dots,w_n)$ במקרה זה נקראת <u>שדה פוטנציאל</u> או <u>שדה משמר</u>.

3.0.2 הגדרה תבנית w ב־$C^1(D)$ שמקיימת גם $w'_{i_{x_j}} = w'_{j_{x_i}}$ לכל $1\le i,j\le n$ נקראת <u>תבנית דיפרנציאלית סגורה</u>.

3.0.3 למה תבנית מדוייקת שהיא גם ב־$C^1(D)$ היא סגורה.

3.0.4 הערה ההפך ללמה אינו נכון.

3.0.5 משפט תהי $f=(f_1,\dots,f_n)$ פונקציה וקטורית רציפה בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^n$, אז התנאים הבאים שקולים:

1. f שדה פוטנציאל (כלומר $w = f_1dx_1+\dots+f_ndx_n$ מדוייקת).
2. $\int_\gamma f\cdot\vec{dx}=0$ לכל מסילה γ סגרוה וגזירה ברציפות למקוטעין ב־D.
3. לכל שתי מסילות גזירות ברציפות ב־D, γ_1 ו־γ_2 המתחילות באותה נקודה ומסתיימות באותה נקודה מתקיים

$$\int_{\gamma_1} f\cdot\vec{dx} = \int_{\gamma_2} f\cdot\vec{dx}$$

4 כלל לייבניץ

4.0.1 הערה אם $f(x)$ רציפה ב־$[a,b]$ אז $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt$ גזירה, וגם $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

4.0.2 משפט (כלל לייבניץ) נניח ש־$f(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ מוגדרת ב־$k = [a,b] \times I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ ומקיימת (בהג"כ נתמקד במשתנה הראשון, x_1):

1. עבור $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ מתקיים שלכל $x_1 \in I_1$ $f(t,x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)$ רציפה ב־$[a,b]$.
2. קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)$ ורציפה ב־$[a,b] \times I_1 \times \{x_2^0\} \times \{x_3^0\} \times \dots \times \{x_n^0\}$.

אז $F(x_1) = \int_a^b f(t,x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)dt$ גזירה ברציפות ב־I_1 ומתקיים

$$F'(x_1) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)dt$$

4.0.3 הערה השימוש במקובל בכלל לייבניץ הוא בתנאים הבאים:
$f(t,x_1,\dots,x_n)$ מוגדרת ב־ $k = [a,b] \times I_1 \times \dots \times I_n$, ולכל $(x_1,\dots,x_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$ $f(t,x_1,\dots,x_n)$ רציפה ב־$[a,b]$, ו־$f'_{x_1}(t,x_1,\dots,x_n)$ קיימת ורציפה ב־k.

5 תחום כוכבי

5.0.1 הגדרה תחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$ נקרא <u>תחום כוכבי</u> אם יש נקודה $x_0 \in D$, כך שלכל $x \in D$ הקטע הישר $[x_0,x]$ נמצא ב־D. x_0 זו נקראת <u>כוכב של D</u>.

5.0.2 הגדרה קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת <u>קבוצה כוכבית</u> אם יש נקודה $x_0 \in S$, כך שלכל $x \in S$ הקטע הישר $[x_0,x]$ נמצא ב־S. x_0 זו נקראת <u>כוכב של S</u>.

5.0.3 תזכורת קבוצה S תקרא <u>קמורה</u> אם לכל שתי נקודות $x,y \in S$ הקטע הישר $[x,y]$ נמצא ב־S.

5.0.4 דוגמות

1. $\mathbb{R}^n$
2. חצי מישור, למשל חצי $\mathbb{R}^n$, כלומר $D = \{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\}$
3. משולש, פירמידה, כל מצולע קמור

דוגמות אלו כולן קבוצות קמורות, לכן כל נקודה בהן היא כוכב.

5.0.5 טענה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה $\iff$ לכל $k \geq 2$, $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ ולכל $x_1, \ldots, x_k \in A$ גם $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in A$.

5.0.6 טענה אוסף הכוכבים של קבוצה קמורה היא קבוצה קמורה.

5.0.7 טענה סגור של קבוצה כוכבית הוא קבוצה כוכבית.

5.0.8 משפט (למת פואנקרה) יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום כוכבי, $f : D \to \mathbb{R}^n$ $(f_1, \ldots, f_n)$ גזירה ברציפות ב־D, ולכל i, j, $1 \leq i, j \leq n$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ אז f שדה משמר.

5.0.9 הערה פירוש הדבר שיש F ממשית ב־D כך ש־$\nabla F = f$.

5.0.10 הערה בלשון תבניות פירוש המשפט הוא שכל תבנית דיפרנציאלית לינארית סגורה בתחום כוכבי היא מדוייקת.

6 משפט גרין

6.0.1 הגדרה קו ז'ורדן הוא קו במישור הנוצר ע"י מסילה סגורה פשוטה.

6.0.2 הגדרה יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום ו־γ מסילת ז'ורדן שהיא חלק מ־∂D (השפה של D). אומרים ש־γ היא בעלת מגמה חיובית ביחס ל־D, או שהיא מכוונת חיובית ביחס ל־D, אם אדם ההולך קדימה על γ ומתקדם במגמת γ רואה בהליכתו את התחום משמאלו.

6.0.3 משפט (משפט הקו של ז'ורדן) קו ז'ורדן Γ מחלק את המישור לשני חלקים, במובן ש־$\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma = C_1 \mathbin{\dot\cup} C_2$, כאשר C_1 הוא התחום החסום ע"י Γ ו־C_2 הוא התחום הלא חסום, החוץ של Γ.

6.0.4 משפט (משפט גרין) יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום כך ש־∂D מורכבת ממספר סופי של קוי ז'ורדן בעלי אורך, ונניח כי $R(x,y), P(x,y)$ רציפות ב־$D \cup \partial D$ וכי R'_y, P'_x רבמ"ש ב־D אז

$$\oint_{\partial D} (P dy - R dx) = \iint_D (P'_x + R'_y) dx dy$$

6.0.5 הערה הסימון $\oint$ פירושו מגמה חיובית ביחס ל־D.

6.0.6 הערה אם ניקח $R \equiv 0$ נקבל $\oint_{\partial D} P dy = \iint_D P'_x dx dy$. בדומה עבור $P \equiv 0$ נקבל $-\oint_{\partial D} R dx = \iint_D R'_y dx dy$.

6.0.7 הגדרה תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ נקרא ניתן להטלה על ציר x אם הוא מהצורה

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, f(x) < y < g(x)\}$$

כאשר f,g שתי פו' רציפות על $[a,b]$ (ומתקיים $f < g$ ב־(a,b)).

6.0.8 הערה בדומה ניתן להגדיר תחום ניתן להטלה על ציר y.

6.0.9 הגדרה תחום נקרא פשוט אם הוא ניתן להטלה על ציר x ועל ציר y.

6.0.10 דוגמה מלבן (לאו דווקא מקביל לצירים) ועיגול הם תחומים פשוטים.

6.0.11 למה אם $f(x,y)$ רבמ"ש בתחום D אז ניתן להרחיב את f ל־$D \bigcup \partial D$ באופן רציף.

6.0.12 דוגמות חישוב שטח: אם $P'_x + R'_y \equiv 1$ אז האינטגרל הכפול במשפט גרין נותן

$$\iint_D 1dxdy = A(D) =: D \text{ השטח של}$$

6.0.13 הגדרה תחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$ נקרא תחום פשוט קשר אם הפנים של כל מסילה פשוטה־סגורה ב־D (מסילת ז'ורדן) נמצא אף הוא ב־D.
הגדרה נוספת D^c ביחס ל־$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ קשיר.

6.0.14 דוגמות $\mathbb{R}^2$, מלבן, עיגול, פס הם פשוטי קשר. טבעת אינה פשוטה קשר.

6.0.15 הערה תחום קשר הוא תחום "בלי חורים".

6.0.16 טענה תחום כוכבי הוא פשוט קשר.

6.0.17 משפט (ההרחבה ללמת פואנקרה) תבנית דיפרנציאלית לינארית סגורה בתחום פשוט קשר היא מדוייקת.

7 פונקציות אנליטיות והרמוניות־בינתיים לא נלמד

7.0.1 טענה לפונקציה אנליטית יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר.

7.0.2 הגדרה פו' $u(x,y)$ בתחום D תקרא פונקציה הרמונית אם היא גזירה ברציפות פעמיים ומקיימת $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

7.0.3 טענה פונקציה ב־$C^2(D)$ המקיימת משוואות קושי־רימן היא הרמונית.

7.0.4 טענה לפונקציה הרמונית u בתחום פשוט קשר יש צמודה הרמונית, כלומר פו' v כך ש־$u+iv$ אנליטית.

7.0.5 טענה בהינתן פו' הרמונית u בתחום D כך ש־$u \in C^2(D)$ אז הפו' $u'_x - iu'_y$ אנליטית.

7.0.6 טענה בהינתן פו' $f = u + iv$ אנליטית בתחום D כך ש־$u \in C^2(D)$ אז גם f'_x אנליטית.

8 משטחים

8.1 הגדרות שקולות למשטח

8.1.1 הגדרה (הגדרת "גרף") יהי $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$, $p \geq 1$. קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת <u>משטח ממימד k</u>, אם לכל $\bar{a} \in M$ יש $r > 0$, כך ש־

$$B(\bar{a}, r) \cap M = \{(x_1, \ldots, x_k, \bar{f}(x_1, \ldots, x_k)) : (x_1, \ldots, x_k) \in E\}$$

כאשר E קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^k$, $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ גזירה ברציפות מסדר p.

8.1.2 הערה בהגדרה הנ"ל, לאו דווקא המשתנים הראשונים הם החופשיים.

8.1.3 הגדרה (הגדרת "פרמטריזציה") באותם תנאים, M <u>משטח ממימד k</u>, אם לכל $\bar{a} \in M$ יש $r > 0$ כך ש:

$$B(\bar{a}, r) \cap M = \{\bar{f}(\bar{u}) : \bar{u} \in E\} = Im(\bar{f})$$

כאשר E קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^k$, $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ גזירה ברציפות מסדר p, $rank(f'(\bar{u})) = k$ ב־E.

8.1.4 הערה במקרה הנ"ל, $F(u_1, \ldots, u_k) = (F_1(\bar{u}), \ldots, F_2(\bar{u}))$, $F'(\bar{u})$ היא מטריצה $n \times k$. בפרט מתקיים:

$$F'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} - & \nabla F_1(\bar{u}) & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla F_n(\bar{u}) & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F'_{u_1} & \cdots & F'_{u_k} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

8.1.5 הגדרה (הגדרת "ker") באותם תנאים, M משטח ממימד k, אם לכל $\bar{a} \in M$ יש $r > 0$ כך ש:

$$B(\bar{a},r) \cap M = \{(x_1,\dots,x_k) \in B(\bar{a},r) : f(x_1,\dots,x_k) = 0\}$$

כאשר $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ גזירה ברציפות מסדר p, E קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ המכילה את $B(\bar{a},r)$, ועבור כל $\bar{x} \in B(\bar{a},r)$ מתקיים $rank(f'(\bar{x})) = k$ ב־E.

8.1.6 הערה במקרה הנ"ל, f' היא מטריצה בגודל $(n-k) \times n$.

8.1.7 הגדרה 3 ההגדרות הנ"ל הן בעלות אופי מקומי. באופן כללי, נקודה $\bar{a} \in M$ עבורה מתקיימת אחת מ־3 ההגדרות, נקראת נקודה רגולרית.

8.2 טופולוגיה לגבי משטחים

8.2.1 הגדרה הומיאומורפיזם בין ני מרחבים טופולוגיים X,Y הוא העתקה $T : X \to Y$, רציפה, חח"ע ועל וגם T^{-1} רציפה.

8.2.2 דוגמה מסילה חלקה ב־$\mathbb{R}^2$ היא הומיאומורפיזם.

8.2.3 טענה $\gamma(a), \gamma(b)$ של מסילה חלקה הן חלק ממשטח "תקני" המכיל את γ.

8.2.4 דוגמה דוגמה לפונקצייה חח"ע ורציפה שאינה הומיאומורפיזם:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (cost, sint) & -2\pi < t \le 0 \\ (2 - cost, sint) & 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

8.2.5 דוגמות משטחים:

1. קשת מעגל ב־$\mathbb{R}^2$
2. מישור
3. פני כדור ב־$\mathbb{R}^3$
4. מסילה ב־$\mathbb{R}^3$. זהו משטח ממימד 1 ב־$\mathbb{R}^3$ אם γ חלקה.
5. קיפול

8.2.6 הגדרה משטח ממימד $n-1$ ב־$\mathbb{R}^n$ נקרא היפר משטח.

8.2.7 דוגמות

1. מסילה ב־$\mathbb{R}^2$
2. מישור ב־$\mathbb{R}^3$
3. פני כדור ב־$\mathbb{R}^3$

8.2.8 הערה קבוצה סופית ב־$\mathbb{R}^n$, $M = \{\bar{x_1}, \dots, \bar{x_k}\}$ נקראת משטח ממימד אפס.

8.2.9 הערה קבוצה פתוחה $M \ni \mathbb{R}^n$ נקראת משטח ממימד n.

8.2.10 הערה להצגה הפרמטרית מהגדרת "פרמטריזציה" נהוג לקרוא מפה מקומית של $M \cap B(\bar{a}, r)$. אוסף כל המפות נקרא האטלס של M.

8.2.11 טענה את המשטח $M \coloneqq \{x^2 + y^2 = 1\}$ (מעגל היחידה) לא ניתן להציג על ידי מפה אחת שהיא הומיאומורפיזם.

8.2.12 טענה אין העתקה חח"ע ורציפה (לאו דווקא הומיאומורפיזם) מקטע פתוח $I \supseteq \mathbb{R}$ על M הנ"ל.

8.3 משיקים למשטח

8.3.1 הגדרה יהי M משטח ממימד k ב־$\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n-1$, גזיר ברציפות מסדר $1 \le p$. וקטור $v \ni \mathbb{R}^n$ נקרא משיק ל־M בנקודה x אם יש מסילה $\gamma : (a,b) \to M$, ונקודה $a < t_0 < b$ כך שמתקיים: $\gamma'(t_0) = v, \gamma(t_0) = x$.

8.3.2 הערה על ידי הזזת (a,b) ניתן להניח $t_0 = 0$.

8.3.3 הגדרה תהי $\bar{a} \in M$, (M משטח כמו קודם). אוסף כל המשיקים ל־M ב־a נקרא המרחב המשיק ל־M ב־$\bar{a}$ ומסומן $T_{\bar{a}}(M)$.

8.3.4 הגדרה ניקח הצגה פרמטרית (הגדרת "פרמטריזציה") כלשהי של סביבת $\bar{a}$ ב־M, $F(\bar{u}) : E \to M$, $F(\bar{u}) = \bar{a}$, $rank(F) = k$, $E \ni \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה. נגדיר:

$$T_p \coloneqq \{F'(\bar{u_0}) \cdot \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^k\}$$

כלומר, זהו אוסף כל הקומבינציות הלינאריות של עמודות $F'(\bar{u_0})$.

8.3.5 הגדרה על פי הגדרת "ker", יש פונקציה $g : B(\bar{a}, r) \to \mathbb{R}^{n-k}$ כך שעבור $r > 0$ קטן מתקיים $B(\bar{a}, r) \cap M = \{\bar{x} \in B(\bar{a}, r) : g'(\bar{x}) = 0\}$. נגדיר:

$$T_{ker} \coloneqq \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : g'(\bar{a}) \cdot \bar{x} = 0\}$$

8.3.6 טענה $T_p = T_{ker} = T_{\bar{a}}$

8.3.7 משפט (כופלי לגראנז') נניח $1 \le k < n$. תהיינה $f, g_1, \ldots, g_k$, פונקציות ממשיות גזירות ברציפות המוגדרות בקבוצה פותחה $E \in \mathbb{R}^n$. נניח $f(\bar{x_0})$ הוא ערך קיצון של ב־E, תחת האילוצים

$$g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_k(\bar{x}) = 0$$

נניח שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(\bar{x_0}) \\ \vdots \\ \nabla g_k(\bar{x_0}) \end{pmatrix}_{k \times n}$$

היא מדרגה k ב־$\bar{x_0}$.
אז יש מספרים ממשיים יחידים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כך שלכל $1 \le j \le n$ מתקיים

$$f'_{x_j}(\bar{x_0}) + \lambda_1 g'_{1\,x_j}(\bar{x_0}) + \cdots + g'_{k\,x_j}(\bar{x_0}) = 0$$

8.4 המכפלה הוקטורית ב־$\mathbb{R}^3$

8.4.1 הגדרה שלשה סדורה של וקטורים ב־$(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ נקראת <u>שלשה ימנית</u> אם $\det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} > 0$.

8.4.2 הגדרה שלושה סדורה של וקטורים $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ נקראת <u>שלושה שמאלית</u> אם $\det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} < 0$.

8.4.3 הערה בפרט שלושה שמאלית או שלושה ימנית מורכבת מ־3 וקטורים בת"ל, בסיס ל־$\mathbb{R}^3$.

8.4.4 הערה לפי שהחלפת שורות במטריצה מכפילה את הדטרמיננטה ב־ (־1), נקבל שאם (v_1, v_2, v_3) ימנית אז (v_2, v_1, v_3) שמאלית. כמו כן, (v_2, v_3, v_1), (v_3, v_2, v_1) שמתקבלות על ידי הזזה ציקלית של (v_1, v_2, v_3) גם הן ימניות.

8.4.5 דוגמה השלשה הימנית המוכרת ביותר, היא וקטורי הבסיס הסטנדרטי:

$$(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$$

אומרים גם שהם <u>קובעים מערכת צירים ימנית</u>.

8.4.6 הגדרה יהיו $a,b \in \mathbb{R}^3$. המכפלה הוקטורית $a\times b$ מוגדרת כך:

- אם $a=b$ אז $a\times b=0$
- אחרת (כלומר, a,b בת"ל), אז $a\times b$ הוא וקטור שאורכו כשטח המקבילית ש־4 קודקודיה הם $\{0,a,b,a+b\}$, והוא מאונך ל־a,b כך ש־$(a,b,a\times b)$ שלושה ימנית.

8.4.7 טענה נסמן ב־θ את הזווית הקטנה בין a ל־b אז $|a\times b| = |a|\cdot|b| cos\theta$.

8.4.8 טענה תכונות מפתח של המכפלה הוקטורית:

1. לינאריות סקלרית בכל אחד מהוקטורים: אם $\lambda,\delta \in \mathbb{R}$ אז
$$(\lambda a)\times(\delta b) = \lambda\delta(a\times b)$$
2. אנטי חילופיות: $b\times a = -a\times b$
3. לינאריות וקטורית: $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$
4. נוסחה אריתמטית:
$$a\times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$
5. $|a\times b|^2 + <a,b>^2 = |a|^2|b|^2$

9 אינטגרלים משטחיים

9.1 האינטגרל המשטחי של משטח ממימד 2 ב־$\mathbb{R}^3$

9.1.1 הגדרה נניח משטח M נתון על ידי $\bar{x}: E\to\mathbb{R}^3$, $E\in\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, $\bar{x}$ כמו בהגרת "פרמטריזציה", $rank(\bar{x}')=2$, גזירה ברציפות, אז

$$\text{M שטח של} := \iint_M dM = \iint_E |\bar{x}'_u \times \bar{x}'_v| dudv$$

9.1.2 הגדרה אם f ממשית ורציפה על M, אז

$$\iint_m f dM = \iint_E f(\bar{x}(u,v))|\bar{x}'_u \times \bar{x}'_v| dudv$$

9.1.3 טענה מתקיים עבור וקטורים $a,b \in \mathbb{R}^3$: $|a \times b| = \sqrt{|a|^2|b|^2 - <a,b>^2}$

9.1.4 מסקנה נניח שהמשטח נתון לפי הגדרה גרפית $\bar{x}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ אז נקבל

$$\text{שטח M} = \iint_M dM = \iint_E |\sqrt{|\bar{x}'_u|^2 \cdot |\bar{x}'_v|^2 - <\bar{x}'_u, \bar{x}'_v>^2}| dudv = \iint_E \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy$$

9.2 האינטגרל המשטחי במקרה הכללי

9.2.1 הגדרה יהיו $a_1, \dots, a_k$ וקטורים בת"ל ב־$\mathbb{R}^n$, $(1 \le k \le n)$. הקבוצה:

$$B(a_1, \dots, a_k) = \{t_1 a_1 + \dots + t_k a_k : 0 \le t_1, \dots, t_k \le 1\}$$

נקראת מקבילון K־מימדי ב־$\mathbb{R}^n$, הנפרש ע"י הוקטורים $a_1, \dots, a_k$.

9.2.2 הערה ניתן להגדיר את המקבילון הנ"ל גם כך:

$$B(a_1, \dots, a_k) = \{A\bar{t} : \bar{t} = (t_1, \dots, t_k), 0 \le t_1, \dots, t_k \le 1\}$$

או

$$B(a_1, \dots, a_k) = \{A\bar{t} : \bar{t} \in I^k\}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k \\ | & & | \end{pmatrix}_{n \times k}$$

ו־I^k היא קוביית היחידה ב־$\mathbb{R}^k$.

9.2.3 דוגמה קוביית היחידה ב־$\mathbb{R}^k$, $I^k = B(e_1, \dots, e_k)$, היא מקבילון.

9.2.4 משפט נניח $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k \\ | & & | \end{pmatrix}$, כאשר $\{a_1, \dots, a_k\}$ בת"ל ב־$\mathbb{R}^n$, אז יש מטריצה אורתוגונלית $T_{n \times n}$ כך ש $TA = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times k}$ כאשר $B_{k \times k}$ הפיכה.

9.2.5 הגדרה נפח של מקבילון $B(a_1, \dots, a_k)$ מוגדר על ידי $\sqrt{det(A^t A)}$.

9.2.6 משפט הפונקציה הממשית המוגדרת על אוסף המטריצות $n \times k$, $\mu : M^{\mathbb{R}}_{n \times k} \to \mathbb{R}$, $\mu(A) = \sqrt{det(A^t A)}$, היא היחידה המקיימת:

1. $\forall_{A, T_{n \times n} Orthogonal} \mu(TA) = \mu(A)$

2. אם $A = \begin{pmatrix} B_{k\times k} \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times k}$ אז $\mu(A) = |det(B)|$

9.2.7 הגדרה אם $\bar{x}(\bar{u})$ הוא הצגה פרמטרית של משטח M ממימד k ב־$\mathbb{R}^n$, כמו בהגדרת פרמטריזציה, אז אלמנט האינטגרציה מוגדר להיות:

$$dM = \sqrt{det(\bar{x}'(\bar{u})^t \bar{x}(\bar{u}))} d\bar{u}$$

בהתאם, אם f ממשית ורציפה על M אז האינטגרל המשטחי של f מוגדר כ:

$$\int_M f dM = \int \cdots \iint_E f(\bar{x}(\bar{u})) dM$$

9.2.8 משפט האינטגרל המשטחי לא תלוי בפרמטריזציה.

9.3 פרמטריזצית גרף להיפר משטח

9.3.1 טענה אם משטח הוא ממימד $k = n-1$ הנתון לפי $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ אז אלמנט האינטגרציה הוא:

$$dM = \sqrt{1 + {f'_{x_1}}^2 + \cdots + {f'_{x_{n-1}}}^2}$$

9.3.2 למה חישוב דטרמיננטה כאשר כל עמודה היא סכום של מספר סופי של עמודות זה כמו לפתוח מכפלה של סוגריים.

9.3.3 דוגמה עבור מטריצה בגודל 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}$:

$$det(A) = det(a_1\ b_1) + det(a_1\ b_2) + det(a_1\ b_3) + det(a_2\ b_1) + det(a_2\ b_2) + det(a_2\ b_3)$$

9.3.4 למה אם $n \geq 2$, $c_1, \ldots, c_{n-1}$ קבועים, אז הדטרמיננטה של המטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ $A = \{a_{ij}\}$ כאשר $a_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j$ היא:

$$det(A) = 1 + c_1^2 + \cdots + c_{n-1}^2$$

9.4 נספח - פונקציית גמא

9.4.1 הגדרה פונקציית גמא מוגדרת עבור $x > 0$ כך:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

9.4.2 הערה האינטגרל מתכנס.

9.4.3 טענה $\forall_{x\in\mathbb{R}} : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

9.4.4 טענה $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \Gamma(n) = (n-1)!$

9.4.5 טענה $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

9.4.6 משפט אם $x, y > 0$, אז מתקיים:

1.

$$\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}dv = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

2.

$$\int_0^{\frac{pi}{2}} cos^{2x-1}(\phi)sin^{2y-1}(\phi)d\phi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

3. עבור $k \geq 2$ טבעי:

$$\int_0^\pi sin^{k-2}(\phi)d\phi = \frac{\Gamma(\frac{k-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

9.5 שטח פני כדור ב־$\mathbb{R}^n$

9.5.1 הגדרה הספירה S_{n-1} מוגדרת על ידי:

$$S_{n-1}(\rho) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots x_n^2 = \rho^2\}$$

9.5.2 טענה עבור פני כדור ב־$\mathbb{R}^n$, $S_{n-1}(\rho)$ נצטרך $n-1$ פרמטרים $\theta,\phi_1,\dots,\phi_{n-2}$, והפרמטריזציה תהיה:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho cos\theta sin\phi_1 \cdots sin\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
x_2 &= \rho sin\theta sin\phi_1 \cdots sin\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
x_3 &= \rho cos\phi_1 sin\phi_2 \cdots sin\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
x_4 &= \rho cos\phi_2 sin\phi_3 \cdots sin\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
x_5 &= \rho cos\phi_3 sin\phi_4 \cdots sin\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho cos\phi_{n-3}sin\phi_{n-2}\\
x_n &= \rho cos\phi_{n-2}
\end{aligned}$$

כאשר $0\le\theta<2\pi, 0\le\phi_1,\dots,\phi_{n-2}\le\pi$.

9.5.3 הערה בפרמטריזציה הנ"ל, אם נוריד את העמודה הימנית נקבל את הפרמטריזציה ל־$S_{n-2}(\rho)$.

9.5.4 טענה קורדינטיות כדוריות לכדור $\bar{B}(0,r)\subset\mathbb{R}^n$, $x_1^2+\dots+x_n^2\le r$, עם n המשתנים $\theta,\phi_1,\dots,\phi_{n-2},\rho$ הן הקורדינטות עבור פני כדור כנ"ל, כאשר:

$$0\le\rho\le r;\ \ 0\le\theta<2\pi;\ \ \forall_{1\le i\le n-2}:0\le\phi_i\le\pi$$

9.5.5 טענה היעקוביאן של הפרמזריזציה הכדורית הנ"ל הוא:

$$J_n=\rho sin^{n-2}\phi_{n-2}\cdot J_{n-1}=$$

$$=\pm\rho^{n-1}sin^{n-2}\phi_{n-2}sin^{n-3}\phi_{n-3}\cdots sin^2\phi_2 sin\phi_1$$

כאשר הסימנים $\pm$ כך:

J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	$\cdots$
$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$

9.5.6 טענה הנפח ה־n־מימדי של $\bar{B}(0,r)$ ב־$\mathbb{R}^n$ הוא:

$$V_n(r)=\frac{r^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

9.5.7 טענה השטח ה $(n-1)$־מימדי ב־$\mathbb{R}^n$ הוא:

$$W_{n-1}(r) = \frac{2r^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

9.5.8 הערה ניתן לשים לב ש $V_n(r)' = W_{n-1}(r)$.

9.6 סימפלקס $(n-1)$ מימדי ב־$\mathbb{R}^n$

9.6.1 הגדרה עבור $n \geq 1$ נסמן ב־$\Sigma(n)$ את הסימפלקס ה $(n-1)$־מימדי כאשר

$$\Sigma(n) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n |\ x_1 + \cdots + x_n = 1, \forall_{1\leq i\leq n} : x_i \geq 0\}$$

9.6.2 הגדרה נסמן ב־$P(n)$ את הגוף ש־$\Sigma(n)$ הוא חלק משפתו, כלומר

$$P(n) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n |\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1, \forall_{1\leq i\leq n} : x_i \geq 0\}$$

9.6.3 טענה

$$\Sigma(n) = \{t(0,\ldots,0,1)+(1-t)(x_1,\ldots,x_{n-1},0)|\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \Sigma(n-1), 0 \leq t \leq 1\}$$

כלומר, $\Sigma(n)$ היא "פירמדיה" $(n-1)$־מימדית ב־$\mathbb{R}^n$.

9.6.4 טענה α_n, הנפח ה n־מימדי של $P(n)$ הוא:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}$$

9.6.5 טענה β_n, השטח ה $(n-1)$־מימדי של $\Sigma(n)$ הוא:

$$\beta_n = \sqrt{n}\cdot\alpha_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$$

10 אינטגרל משטחי מסוג שני

10.1 אוריינטציה

10.1.1 הגדרה היפר משטח M ב־$\mathbb{R}^n$ נקרא בעל אוריינטציה אם יש פונקציה רציפה על M, $N(\bar{x})$, $N : M \to \mathbb{R}^n$ כך שלכל $\bar{x} \ni M$ $N(\bar{x})$ הוא נורמל יחידה למישור המשיק $T_{\bar{x}}(M)$.

10.1.2 דוגמות

1. פונקציה הנורמל למישור $ax + by + cz = d$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, היא

$$N(\bar{x}) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad -N(\bar{x}) = -\frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. פונקצייה הנורמל לפני כדור $x^2 + y^2 + z^2 = R$ היא

$$N(\bar{x}) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{R}$$

זהו נורמל חיצוני. $-N(\bar{x})$ נורמל פנימי.

10.1.3 דוגמה דוגמה למשטח שאינו בעל אוריינטציה, אינו אוריינטבילי - טבעת מביוס.

10.1.4 טענה אם ניתן להציג משטח על ידי פרמטריזציה אחת אז הוא בעל אוריינטציה.

10.2 מכפלה וקטורית ב־$\mathbb{R}^n$

10.2.1 הגדרה יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. טרנספורמציה לינארית $T : V \to F$ נקראת פונקציונל לינארי (פ"ל). כלומר, היא נקראת כך אם מתקיים

$$\forall_{\alpha,\beta \in F,\ v_1,v_2 \in V} :\ T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

10.2.2 טענה נניח $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פ"ל, $v \in \mathbb{R}^n$, אז

$$Tv =< v, (Te_1, \dots, Te_n) >=< v, v^* >$$

10.2.3 טענה גם ההפך הוא נכון. בהינתן $u \ni \mathbb{R}^n$, ההעתקה $Tv :=< v, u >$ היא פ"ל.

10.2.4 הגדרה קיים וקטור יחיד v^* המקיים $Tv =< v, v^* >$. נגדיר את v^* להיות המכפלה הוקטורית

$$v^* = v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$$

10.2.5 טענה

$$v^* = v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = "det" \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & \vdots & - \\ - & v_{n-1} & - \\ e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

10.2.6 טענה בהינתן פרמטריזציה $F(\bar{u})$, של היפר משטח M ב־$\mathbb{R}^n$, ק"פ $\bar{u} \in E$, $F(\bar{u}) = (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n))$, אז נקבל

$$N(F(\bar{u})) = \frac{F'_{u_1} \times \cdots \times F'_{u_{n-1}}}{||F'_{u_1} \times \cdots \times F'_{u_{n-1}}||}$$

היא אורייטנציה רציפה ל=$F(\bar{u})$ (כלומר נורמל יחידה רציף).

10.3 אינטגרל משטחי מסוג שני

10.3.1 משפט אם M היפר משטח קשיר בעל אורינטציה אז יש לו בדיוק 2 אוריינטציות רציפות.

10.3.2 הגדרה יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היפר משטח בעל אוריינטציה, נתון על ידי פרמ' $\bar{r}(E)$, עם נורמל רציף $N = N(\bar{x})$. נניח $F : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי, אז האינטגרל

$$\int_M < F, N > dM = \underbrace{\int \cdots \int_E}_{n-1 \text{ מימדי}} \frac{< F(\bar{r}(\bar{u})), N(\bar{r}(\bar{u})) >}{\sqrt{det(\bar{r}(\bar{u})^t \cdot \bar{r}(\bar{u}))}} du_1 \cdots du_{n-1}$$

נקרא <u>אינטגרל משטחי מסוג שני</u> על M ביחס לנורמל N.

10.3.3 הערה האינטגרל הנ"ל מוסמן גם עם ds במקום dM.

10.3.4 הערה האינטגרל נקרא גם <u>השטף של F</u> דרך M בכיוון הנורמל N.

10.3.5 טענה האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה.

10.3.6 הערה אם אין פרמ' אחת שנותנת את המשטח M כולו, אז השטף הכולל מחושב ע"י כמה פרמטריזציות שאינן חופפות.

10.3.7 הערה אם הנורמל חיצוני אז האינטגרל חיובי. אם הנורמל פנימי אז האינטגרל שלילי.

11 משפט הדיברגנץ

11.1 בדרך למשפט הדיברגנץ

11.1.1 הגדרה תהי $G = \{\bar{x} : g(\bar{x}) < 0\}$ עבור $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מהגדרת $''ker''$, גזירה ברציפות, $\partial G = \{\bar{x} : g(\bar{x}) = 0\}$ בסביבת $\bar{x} \in \partial G$. אז וקטור $v \neq 0$ ב־$\mathbb{R}^n$ נקרא <u>חיצוני</u> ביחס ל־G (ב־$\bar{x}$) אם יש $\epsilon > 0$ כך שלכל $0 < t < \epsilon$, $\bar{x} + tv \notin G$.

11.1.2 הגדרה באותם תנאים, אם $\bar{x} \in \partial G$ אז וקטור $v \neq 0$ ב־$\mathbb{R}^n$ נקרא <u>פנימי</u> ביחס ל־G (ב־$\bar{x}$) אם יש $\epsilon > 0$ כך שלכל $0 < t < \epsilon$, $\bar{x} + tv \in G$.

11.1.3 טענה אם $\bar{x} \in \partial G$ וגם $< \nabla g(\bar{x}), v > > 0$ אז v וקטור חיצוני ביחס ל־G.

11.1.4 מסקנה $N = \frac{\nabla g(\bar{x})}{\|\nabla g(\bar{x})\|}$ הוא נורמל חיצוני.

11.1.5 טענה אם v חיצוני אז $< \nabla g(\bar{x}), v > \geq 0$.

11.1.6 טענה אם $\bar{x} \in \partial G$ וגם $< \nabla g(\bar{x}), v > < 0$ אז v וקטור פנימי ביחס ל־G.

11.1.7 טענה אם v פנימי אז $< \nabla g(\bar{x}), v > \leq 0$.

11.1.8 טענה v חיצוני ביחס ל־G $\iff$ v פנימי ביחס ל־$\bar{G}^c \backslash \partial G$.

11.1.9 דוגמה עבור $G : x^2 + y^2 < 1$ ב־$\mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (0,1)$, $v = (1,0)$ הוא וקטור חיצוני עם $< \nabla g, v >= 0$.

11.1.10 מסקנה אם G מהצורה $G = \{\bar{x} : f(x_1, \ldots, x_{n-1}) < x_n\}$ אז לנורמל החיצוני N רכיב n שלילי ($N_n < 0$).

11.1.11 מסקנה בדומה, אם G מהצורה $G = \{\bar{x} : f(x_1, \ldots, x_{n-1}) > x_n\}$ אז לנורמל החיצוני N רכיב n חיובי ($N_n > 0$).

11.1.12 טענה עבור G מהצורה $G = \{\bar{x} : f(x_1, \ldots, x_{n-1}) < x_n\}$ הנורמל החיצוני הוא

$$\frac{(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_{n-1}}, -1)}{\sqrt{{f'_{x_1}}^2 + \cdots + {f'_{x_{n-1}}}^2 + 1}}$$

והאינטגרל המשטחי ביחס אליו הוא

$$\int \cdots \int_{\partial G} < F, N > dM =$$

$$\int \cdots \int_E F(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \cdot (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_{n-1}}, -1) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

11.2 הדיברגנץ

11.2.1 הגדרה תהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי רציף ב־Ω, $a \in \Omega$. $F = (f_1, \ldots, f_n)$ כך ש $f_1, \ldots, f_n$ פו' ממשיות רציפות ב־Ω. הדיברגנץ של F ב־$a \in \Omega$, מוגדר להיות הגבול (אם קיים)

$$divF\,(a) = \lim_{R \to a} \frac{1}{m(R)} \int \cdots \int_{\partial R} < F, N > dM$$

כאשר R היא קוביה סגורה n־מימדית שצלעותיה בכיווני הבסיס הסטנדרטי ב־$\mathbb{R}^n$. $R : I_1 \times \cdots \times I_n$ כאשר לכל $1 \leq j \leq n$ I_j קטע סגור ב־$\mathbb{R}$.
$m(R) = |I_1|^n$ הוא הנפח ה n־מימדי של הקוביה. N הנורמל החיצוני.

11.2.2 דוגמה דוגמה לשדה וקטורי רציף ב־$\mathbb{R}^2$ אשר הגבול של הדיברגנץ לא קיים אצלו:

$$F = (xsin\frac{1}{x^2}, 0)$$

11.2.3 למה אם השדה הוקטורי F מהגדרת הדיברגנץ הוא בנוסף גזיר ברציפות אז

$$divF\,(a) = f'_{1_{x_1}}(a) + \cdots + f'_{n_{x_n}}(a)$$

11.2.4 הגדרה תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ ק"פ. נאמר ש־G בעלת שפה חלקה אם לכל $\bar{x_0} \in \partial G$ יש כדור פתוח $B(\bar{x_0}, r)$, $1 \leq j \leq n$ ופונקציה h גזירה ברציפות על $B(\hat{\bar{x}}_0, r) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, כך ש

- $\partial G \cap B(\bar{x_0}, r) = \{\bar{x} \in B(\bar{x_0}, r) : x_j = h(\hat{\bar{x}}_j)\}$
- וגם $G \cap B(\bar{x_0}, r)$ היא אחת הקבוצות:
  - $G \cap B(\bar{x_0}, r) = \{\bar{x} \in B(\bar{x_0}, r) : x_j > h(\hat{\bar{x}}_j)\}$

– $G \cap B(\bar{x_0}, r) = \{\bar{x} \in B(\bar{x_0}, r) : x_j < h(\hat{\bar{x_j}})\}$

כאשר $\hat{\bar{x_j}} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

11.2.5 טענה G בעלת שפה חלקה $\iff$ $\bar{G}^{\,c}$ בעלת שפה חלקה.

11.2.6 דוגמות

1. $G = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ היא בעלת שפה חלקה.
2. פני כדור: $G = \{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ היא בעלת שפה חלקה.
3. פנים עיגול היחידה מנוקב ברדיוס החיובי:

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 \wedge (x < 0 \vee y \neq 0)\}$$

היא <u>לא</u> בעלת שפה חלקה.

11.2.7 הערה שפה חלקה ∂G של קבוצה פתוחה $G \subset \mathbb{R}^n$ היא בפרט היפר משטח.

11.2.8 טענה אם מגדירים לכל $\bar{x} \in \partial G$ (∂G כנ"ל) נורמל מידה חיצוני ל־G ב־$\bar{x}$, $N(\bar{x})$, אז $N(\bar{x})$ פונקציה רציפה על ∂G.

11.2.9 מסקנה שפה חלקה של קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ היא היפר משטח בעל אוריינטציה.

11.2.10 מסקנה כל היפר משטח ב־$\mathbb{R}^3$ שמכיל טבעת מביוס חלקה אינו שפה חלקה של קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^3$.

11.2.11 משפט (משפט הדיברגנץ, משפט גאוס) תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, קשירה וחסומה בעלת שפה חלקה. נניח ש־F שדה וקטורי גזיר ברציפות בקבוצה פתוחה שמכילה את $\bar{G}$, $F = (f_1, \dots, f_n)$. אז

$$\int \cdots \int_{\partial G} < F, N > dM = \int \cdots \int_G (div\ F) dx_1 \cdots dx_n$$

כאשר N הנורמל החיצוני.

11.2.12 הערה האינטגרל משמאל הוא השטף הכולל החוצה את F.

11.2.13 הגדרה תחום ב־$\mathbb{R}^3$ נקרא <u>ניתן להטלה</u> על מישור x–y אם הוא מהצורה

$$G = \{(x, y, z) : \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

כאשר D תחום ב־$\mathbb{R}^2$.

11.2.14 הערה D הוא ההטלה של G על מישור $x-y$.

11.2.15 הערה בדומה ניתן להגדיר תחום ניתן להטלה על מישור $x-z$ ומישור $y-z$.

11.2.16 הגדרה תחום פשוט ב־$\mathbb{R}^3$ הוא תחום שניתן להטלה על מישור $x-y$, מישור $x-z$ ומישור $y-z$.

11.2.17 טענה כל וקטור יחידה $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ניתן לכתוב כ

$$(a,b) = (cos\theta, sin\theta) = (cos\theta, cos(\frac{\pi}{2} - \theta))$$

כאשר $0 \le \theta < 2\pi$ היא הזווית עם ציר x החיובי.

11.2.18 טענה כל וקטור יחידה $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ניתן לכתוב כ

$$(a,b,c) = (cos\theta_x, cos\theta_y, cos\theta_z)$$

כאשר $\theta_z, \theta_y, \theta_x$ הן הזוויות עם ציר x החיובי, y החיובי, z החיובי בהתאמה.

11.3 חישובים על ידי משפט הדיברגנץ

11.3.1 טענה נניח ש $F = (P,Q,R)$ שדה וקטורי גזיר ברציפות בקבוצה פתוחה G, $\bar{x_0} \in G$. נניח שלכל $k \in \mathbb{N}$ Ω_k הוא תחום חסום בעל שפה חלקה, $\bar{x_0} \in \Omega_k$ וגם $\lim_{k\to\infty} diam\Omega_k = 0$, אז

$$divF\ (\bar{x_0}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{V(\Omega_k)} \iint_{\partial\Omega_k} < F, N > dM$$

כאשר $V(\Omega_k)$ הוא הנפח של Ω_k ב־$\mathbb{R}^3$.

11.3.2 טענה אם $F = (f_1, \ldots, f_n)$ שדה וקטורי כך ש $divF \equiv 1$, אז השטח ה n־מימדי של G (ק"פ) ב־$\mathbb{R}^n$ ניתן לחישוב על ידי:

$$\text{השטח} = \int \cdots \int_G 1dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{\partial G} < F, N > dM$$

11.4 זהויות גרין

נניח $u(x,y,z)$ ממשית בתחום חסום G ב־$\mathbb{R}^3$ בעל שפה חלקה וגזירה ברציפות בקבוצה פתוחה $T \supset \bar{G}$. נניח כי $v(x,y,z)$ פו' ממשית בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני ב־T. אז ניתן לנסח את זהויות גרין:

11.4.1 טענה (הזהות הראשונה של גרין)

$$\iiint_G u\Delta v \, dxdydz + \iiint_G <\nabla u, \nabla v> dxdydz = \iint_{\partial G} uv_N dM$$

כאשר Δv הוא הלפלסיאן של v, כלומר $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}$, ו־$v_N$ היא הנגזרת הכיוונית של v בכיוון N.

11.4.2 טענה (הזהות השנייה של גרין) באותם סימונים מתקיים

$$\iiint_G (u\Delta v - v\Delta u) dxdydz = \iint_{\partial G} (uv_N - vu_N) dM$$

11.4.3 טענה אם בנוסף u, v הרמונית, כלומר $\Delta u, \Delta v \equiv 0$, אז

$$\iint_{\partial G} uv_N dM = \iint_{\partial G} vu_N dM$$

12 שפה של משטח

12.1 הקדמה קלה להגדרה פורמלית של שפה

12.1.1 הגדרה לכל $k \geq 1$ נגדיר את חצי המרחב "העליון" של H^k של $\mathbb{R}^k$ להיות

$$H^k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_k \geq 0\}$$

12.1.2 טענה השפה הטופולוגית של H^k היא

$$\partial H^k = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\}$$

12.1.3 הגדרה בהקשר של טופולוגיה מושרית מ־$\mathbb{R}^k$ ל־H^k ניתן לחלק את הקבוצות הפתוחות ב־H^k בטופולוגיה מושרית זו לשני סוגים:

I. קבוצות פתוחות שאינן חותכות את ∂H^k, כלומר קבוצות פתוחות רגילות ב־$\mathbb{R}^k$.

II. קבוצות פתוחות שחותכות את ∂H^k, כלומר קבוצות "חצי פתוחות" ב־$\mathbb{R}^k$.

12.1.4 הגדרה תהי U קבוצה פתוחה מסוג II ב־H^k. תהי $f : U \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$.
נאמר ש־f דיפרנציאבילית על U אם יש קבוצה פתוחה $\hat{U}$ ב־$\mathbb{R}^k$, $U \subset \hat{U}$ ופוקנציה דיפרנציאבילית $\hat{f} : \hat{U} \to \mathbb{R}^n$ כך ש $\hat{f}|_U = f$.

12.1.5 הערה באופן דומה ניתן להגדיר פו' גזירה ברציפות ב־U כנ"ל.

12.2 הגדרה פורמלית לשפה של משטח

12.2.1 הגדרה קבוצה M סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}^n$ נקראת משטח k־מימדי עם שפה, אם לכל $\bar{x_0} \in M$ יש סביבה ב־M, $B(\bar{x_0}, r) \cap M$ וקבוצה פתוחה $\Omega \subset H^k$ מסוג I או II והומיאומורפיזם גזיר ברציפות $f : \Omega \overset{\text{על}}{\to} B(\bar{x_0}, r) \cap M$ כך ש $rank\ f'(\bar{u}) = k$ לכל $\bar{u} \in \Omega$ ובנוסף יש f כך ש Ω מסוג II.

12.2.2 הערה הדרישה "יש f כך ש Ω מסוג II" היא כדי להבטיח $\partial M \neq \varnothing$.

12.2.3 הגדרה אוסף הנקודות במשטח עם שפה M שהן ב $f(\Omega)$ עבור Ω מסוג I או ב $f(\Omega \backslash \partial H^k)$ אם Ω מסוג II נקראות נקודות פנימיות של M.

12.2.4 הגדרה אוסף כל הנקודות הפנימיות של משטח M עם שפה מסומן ב M° או $Int(M)$.

12.2.5 הגדרה אוסף כל הנקודות במשטח עם שפה M שהן ב $f(\Omega \cap \partial H^k)$ עבור Ω מסוג II בהגדרה נקרא השפה של M, ומסומן ∂M.

12.2.6 הערה מעתה, כל משטח M הוא משטח עם שפה, אלא אם נציין אחרת.

12.2.7 טענה $\bar{x_0}'$ היא נקודת שפה של M $\iff$ יש $r' > 0$ וקבוצה פתוחה Ω' מסוג II ב־H^k והומיאומורפיזם גזיר ברציפות $f : \Omega' \overset{\text{על}}{\to} B(\bar{x_0}', r') \cap M$ כך ש $f^{-1}(\bar{x_0}') \in \partial H^k$.

12.2.8 הערה בהתייחס להגדרת נקודות פנימיות ב־M, הרי שאם f הומיאומורפיזם ו־Ω (אם היא מסוג I) או $\Omega \backslash \partial H^k$ (אם Ω מסוג II) הן ק"פ רגילות ב־$\mathbb{R}^k$, נובע ש־M° היא ק"פ בטופולוגיה המושרית על M ע"י הטופולוגיה הרגילה ב־$\mathbb{R}^n$ ו־ $\bar{x}' \in M^\circ$ $\iff$ יש $0 < r'$ והומיאומורפיזם $f : \Omega \overset{\text{על}}{\to} B(\bar{x}', r') \cap M$ כאשר Ω ק"פ מסוג I ב־H^k.

12.2.9 מסקנה $M^\circ \cap \partial M = \varnothing$. כלומר אם נקודה $\bar{x}$ היא נקודת שפה לפי הומיאומורפיזם f אז כך לפי כל הומיאומורפיזם אחר וכנ"ל לגבי נקודה פנימית.

12.2.10 טענה אם M משטח מדרגה k עם שפה ∂M, אז ∂M היא משטח מדרגה $k - 1$.

12.2.11 מסקנה אם M משטח מדרגה k עם שפה ∂M אז $\partial(\partial M) = \varnothing$.

12.2.12 דוגמות

1. אם $M = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ אז $\partial M = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
2. אם $M = \bar{S}^+_{2,R} = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ אז $\partial M = \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$.
3. אם $M = \{x^2 + y^2 = R^2, a \leq z \leq b\}$ (מעטפת גליל בלי הרדיוסים) אז $\partial M = \{x^2 + y^2 = R^2, z = a\} \cup \{x^2 + y^2 = R^2, z = b\}$

13 אוריינטציה

13.0.1 הגדרה בהנתן שדה וקטורי גזיר ברציפות ב־$\mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$, כאשר P, Q, R פונקציות גזירות ברציפות של 3 משתנים, ה־<u>$curl$</u> (נקרא גם רוטור) של F מוגדר להיות הוקטור:

$$curl\ F = rot\ F := (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$$

או בכתיב דטרמיננטי:

$$curl\ F = "det" \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

13.0.2 הערה $curl\ F$ מסומן ב־ $\nabla \times F$.

13.0.3 הגדרה יהיו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיסים של $\mathbb{R}^n$. נסמן שתי מטריצות $n \times n$ $[v] = [v_1, \dots, v_n], [w] = [w_1, \dots, w_n]$. נגדיר לכל $1 \leq i \leq n$ $A_i = [v_i]_C$ ו־$M^B_C = [A_1, \dots, A_n]_{n \times n}$. מתקיים שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ $M^B_C[v]_B = [v]_C$. המטרציה M^B_C נקראת מטריצת המעבר בין הבסיסים B ל־C.

13.0.4 טענה המטריצה M^B_C הנ"ל, היא היחידה המקיימת את התנאים הנ"ל.

13.0.5 טענה לכל 3 בסיסים B, C, D מתקיים $M^B_C = M^D_C M^B_D$.

13.0.6 הגדרה אומרים ששני בסיסים B, C שקולים, $B \sim C$ אם $det\ M^B_C > 0$.

13.0.7 טענה היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

13.0.8 טענה במקרה ש $V = \mathbb{R}^n$ זה שקול לכך שלמטריצות $[w], [v]$ דטרמיננטות עם אותו סימן.

13.0.9 מסקנה עבור $V=\mathbb{R}^n$ $B\sim C$ אם $det([w][v])>0$.

13.0.10 הגדרה כל מחלקת שקילות כזו נקראת <u>אוריינטציה של V</u>.

13.0.11 טענה ב־V יש בדיוק שתי אוריינטציות.

13.0.12 טענה אם B,C בסיסים אורתוגונליים של $\mathbb{R}^n$ אז M_C^B אורתוגונלית, ובפרט $det(M_C^B)=\pm1$.

13.1 אוריינטציה מושרית על שפה של משטח מדרגה 2 ב־$\mathbb{R}^3$

13.1.1 טענה נניח $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח מדרגה 2 עם שפה. נניח $\bar{x}\in\partial M$ אז מתקיים $T_{\bar{x}}(\partial M)\subseteq T_{\bar{x}}(M)$ ובנוסף $dim\, T_{\bar{x}}(M)=2, dim\, T_{\bar{x}}(\partial M)=1$.

13.1.2 טענה אם a,b בת"ל ב־$\mathbb{R}^3$ אז ל־$\{a,b,a\times b\}$ אוריינטציה חיובית.

13.1.3 הגדרה יהי M משטח ממימד k עם שפה ב־$\mathbb{R}^n$ ויהי $\bar{x}\in\partial M$. וקטור v ב־$\mathbb{R}^n$ כך ש־$v\in T_{\bar{x}}(M)\backslash T_{\bar{x}}(\partial M)$ נקרא <u>וקטור פנימי ל־M ב־$\bar{x}$</u> אם יש $\epsilon>0$ ומסילה γ גזירה ברציפות, $\gamma:[0,\epsilon]\to M$, $\gamma(0)=\bar{x}$, $\gamma((0,\epsilon))\subset M^\circ$, $\gamma'(0)=v$.

13.1.4 הגדרה וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ נקרא <u>וקטור חיצוני</u> אם $-v$ הוא וקטור פנימי.

13.1.5 הערה בפרמטריזציה תיקנית של שפה (H^k וכו'), $r_v'(u,0)$ הוא וקטור פנימי.

13.1.6 טענה יהי $\bar{x}\in\partial M$, אז $v\in T_{\bar{x}}(M)$ הוא וקטור פנימי $\iff$ בכל פרמטריזציה תקנית $\bar{r}(u_1,\ldots,u_k)$ שמרכזה ב־$\bar{x_0}$, $\bar{r}(\bar{u_0})=x_0$ $(\bar{u_0}=(u_1^0,\ldots,u_k^0))$ מתקיים $\alpha_k>0$ כאשר $v=\alpha_1\bar{r}'_{u_1}(\bar{u_0})+\cdots+\alpha_k\bar{r}'_{u_k}(\bar{u_0})$.

13.1.7 הגדרה יהי וקטור $h\neq0$, $h\in T_{\bar{x}}(\partial M)$, $\bar{x_0}=\bar{r}(u_1^0,0)$. נאמר ש־$h$ מגדיר את הכיוון (אוריינטציה) המושרה מהפרמטריזציה (התקנית כאמור) $\bar{r}(u_1,u_2)$ על ∂M, אם ל־$\{v,h\}$ אותה אוריינטציה כמו ל־$\{\bar{r}'_{u_1},\bar{r}'_{u_2}\}$ ב־$\bar{x_0}$, כאשר v וקטור חיצוני.

13.1.8 הערה נשים לב שזו גם האוריינטציה של $\{h,-v\}$.

13.1.9 טענה h בכיוון $\bar{r}'_{u_1}(u_1^0,0)$.

13.1.10 הערה מהטענה נובע שהכיוון לא תלוי בבחירת הוקטור החיצוני v.

13.1.11 טענה כיוון $\bar{r}'_{u_1}\times\bar{r}'_{u_2}$ ככיוון $v\times h$.

13.1.12 הערה יהי משטח בר כיוון M $(k=2, n=3)$ עם נורמל רציף $N(\bar{x})$. נניח $\bar{r}(u,v)$ פרמטריזציה של ק"פ ב־M, אז ניתן להגיע ממנה בקלות לפרמטריזציה אשר $\bar{r}'_{u_1} \times \bar{r}'_{u_2}$ בכיוון $N(\bar{x})$.

14 משפט סטוקס

14.0.1 משפט (משפט סטוקס) יהי M משטח דו־מימדי קומפקטי ב־$\mathbb{R}^3$ ובר כיוון, גזיר פעמיים ברציפות ובעל שפה ∂M. נניח כי $\vec{F} = (P,Q,R)$ הוא שדה וקטורי גזיר ברציפות בק"פ המכילה את M וכי $N = N(\bar{x})$ הוא נורמל יחידה רציף על M. אז

$$\iint_M < curl\, F, N > dM = \oint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

כאשר הכיוון על ∂M הוא לפי האוריינטציה בחיובית המושרית מ־N. כלומר ככיוון $\bar{r}'_u(u,0)$ כאשר $\bar{r}(u,v)$ הוא פרמטריזציית שפה תקנית כך ש־$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ בכיוון N.

14.0.2 הערה קיימות פרמטריזציות כנ"ל.

14.0.3 הערה הכיוון הוא ככיוון h המגדיר אוריינטציה המושרית מהפרמטריזציה.

14.0.4 הערה לצרכים מעשיים/תרגילים מקובלת הדרך הבאה לקביעת כיוון האינטגרציה הנכון על ∂M:
זהו כיוון הליכתו של גמד ההולך קדימה על השפה, וגופו, מכפות רגליו אל ראשו, בכיוון N כך שהוא רואה את המשטח משמאלו.

14.0.5 דוגמות

1. קליפת חצי כדור היחידה העליון, עם N נורמל חיצוני. שפת משטח זה (M) היא $\partial M = \{x^2+y^2=1, z=0\}$. הכיוון על ∂M הוא נגד כיוון השעון "הרגיל" במישור $x-y$.
2. קליפת חצי כדור היחידה העליון, עם N נורמל פנימי. אז הכיוון הפוך לכיוון ב־(1).
3. קליפת חצי כדור היחידה התחתון עם נורמל N חיצוני. אז הכיוון על ∂M הוא עם כיוון השעון "הרגיל".
4. M הוא קליפת חצי כדור היחידה העליון ללא כיפה ו־N נורמל חיצוני.

$$M = \{x^2+y^2+z^2=1, 0 \le z \le \frac{1}{2}\}$$

נקבל $\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2$ כאשר

$$\gamma_1 = \{x^2+y^2=1, z=0\}, \gamma_2 = \{x^2+y^2=\frac{3}{4}, z=\frac{1}{2}\}$$

כאשר הכיוון על γ_1 הוא נגד כיוון השעון, והכיוון על γ_2 הוא עם כיוון השעון.

14.0.6 טענה נשים לב שאם M משטח ללא שפה, אז נובע ממשפט סטוקס ש

$$\iint_M < curl\, F, N > dM = 0$$

14.0.7 הערה משפט גרין הוא מקרה פרטי של משפט סטוקס.

14.0.8 הגדרה אם Γ עקומה סגורה ב־$\mathbb{R}^3$ אז $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dx}$ הוא <u>הסרקולציה</u> של F לאורך Γ.

14.0.9 טענה נניח $B(\bar{a}, r)$ עיגול מישורי ברדיוס r סביב a, אז

$$< curl\, F, N >= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{|\bar{x} - \bar{a}| = r} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

הסוף