תרגיל 6

1. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{\mathbb{N},\emptyset\}$ ו $O_n=\{1,...,n\}$.
פתרון:
הוא T_0 בלבד. הוכחה:
T_0: יהיו $x_2\neq x_1$. בה"כ $x_1<x_2$ ואז $x_1\in O_{x_1}$ ו $x_2\notin O_{x_1}$.
לא T_1: יהיו $x_2\neq x_1$. במידה ו $x_2<x_1$ אזי כל קבוצה פתוחה שמכילה את x_1 תכיל גם את x_2 לפי הגדרת O_n. לכן לא נוכל למצאו קבוצה פתוחה U כך ש $x_1\in O$ ו $x_2\notin O$.

2. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X,τ) מ"ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y\subseteq X$ הוא גם T_2.
פתרון:
יהא Y תת מרחב של X. יהיו $y_2\neq y_1$ ב Y. הנקודות $y_1.y_2$ גם ב X ולכן קיימות סביבות פתוחות (ב X) זרות V_1,V_2 כך ש $y_i\in V_i$. נקבל כי $y_i\in V_i\cap Y$ ואלו סביבות פתוחות ב Y וזרות.

3. יהא (X,τ) מ"ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau\subseteq\tau'$ טופולוגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.
פתרון:
יהיו $x_2\neq x_1$ ב X אזי קיימות $V_1,V_2\in\tau$ זרות כך ש $x_i\in V_i$. כיוון ש $\tau\subseteq\tau'$ אז $V_1,V_2\in\tau'$ יפרידו בין x_1,x_2 .

4. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ"מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ"מ ויהיו S_1,S_2 קבוצות סגורות זרות.

(א) לכל $x\in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2)>0$
פתרון:
נניח בשלילה כי קיים $x\in S_1$ כך ש $d(x,S_2)=0$ אזי קיימים $y_n\in S_2$ כך ש $d(x,y_n)\to 0$, כלומר $y_n\to x$. כיון ש S_2 סגורה אז גם $x\in S_2$ בסתירה לכך ש S_1,S_2 זרות.

(ב) לכל $x\in S_1$ נגדיר $r_x=\frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1=\cup_{x\in S_1}B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y\in S_2$ נגדיר $r_y=\frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2=\cup_{y\in S_2}B(y,r_y)$. ברור כי V_1,V_2 פתוחות וזרות ו $S_i\subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1,V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.
פתרון:
נניח בשלילה החיתוך $V_1\cap V_2$ אינו ריק. אזי קיימים $x\in S_1,y\in S_2$ כך ש $B(x,r_x)\cap B(y,r_y)\ni z$ אינו ריק. בה"כ $r_y\leq r_x$. נקבל כי

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)<r_x+r_y\leq 2r_x=d(x,S_2)=\inf\{d(x,\tilde{y}):\tilde{y}\in S_2\}$$

סתירה.

5. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C = A \cup T | A \in \mathbb{CL}, T \subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופלוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq R$.

פתרון:

$O \in \tau$ פתוחה אמ"מ $O^c = A \cup T$ סגורה אמ"מ $O = A^c \cap T^c = B \cap R$ מקיימת $B = A^c$ פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו $R = T^c \supseteq S^s$

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא האוסדורף.

פתרון:

תהי O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. אז $O = O \cap \mathbb{R}$, ומתקיים ש O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$S^c \subseteq \mathbb{R}$. לכן O פתוחה ב τ. הטופולוגיה האוקלידית היא T_2 , ותרגיל אחר שעשיתם (ואם לא, תעשו!) שכל טופולוגיה שמכילה טופולוגיה האוסדורפית, היא האוסדורפית.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $O \supseteq S$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

פתרון:

לפי סעיפים קודמים, יש B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו $S^c \subseteq R$ כך ש $O = B \cap R$. נראה כי $O = B$ ע"י שנראה כי $R = \mathbb{R}$ ואז נסיים. אכן, מהנתון כי $S \subseteq O = B \cap R$ נקבל כי $S \subseteq R$ אבל כיוון שגם $S^c \subseteq R$ נקבל כי $\mathbb{R} = S \cup S^c \subseteq R$ ולכן הם שווים.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות בτ וזרות כך ש $0 \in U, S \subseteq V$. הסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ אינו T_3.

פתרון:

נניח בשלילה שיש קבוצות כאלו.

אם $V \in \tau$ כך ש $S \subseteq V$ אז V פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לפי סעיף קודם.

בנוסף, $U = B \cap R$ עבור B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq R$.

לפי ההנחה בשלילה, $U \cap V = \emptyset$. כלומר, $B \cap R \cap V = \emptyset$.

$0 \in B$ וB פתוחה בטופולוגיה האוקלידית לכן קיים $B(0, \epsilon) \subseteq B$ ואז $\emptyset \neq B(0, \epsilon) \cap S \subseteq B \cap S$. כלומר החיתוך $B \cap S$ אינו ריק ולכן גם $B \cap S \subseteq B \cap V$.

.

כלומר, $B \cap V \neq \emptyset$. מכיוון ששתיהן פתוחות בטופולוגיה האוקלידית, $B \cap V$ פתוחה באוקלידית ולכן היא לא בת מנייה, כלומר $|B \cap V| > \aleph_0$ (להזכירכם כל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא לא בת מניה כי היא מכילה קטע פתוח).

כעת, $R^c \subseteq S$. כלומר, המשלים של R הוא בן מנייה. לכן $B \cap V \not\subseteq R^c$. זה אומר ש $[B \cap V] \cap R \neq \emptyset$. סתירה.

נשים לב כי $S = \emptyset \cup S$ סגורה בτ, ו$0 \notin S$. אבל ראינו שלא ניתן להפריד בין 0 לS.
מסקנה: $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא לא T_3.

6. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

פתרון:

כיוון ש $A \neq \mathbb{R}$ אזי קיים $x \in \mathbb{R} \backslash A$. כעת נגדיר $V_1 = (x, \infty), V_2 = (-\infty, x)$ פתוחות ב $\mathbb{R}$ ולכן $A \cap V_i \neq \emptyset$ (לכל i) כי A צפופה. נקבל מכאן כי

$$A = [A \cap V_1] \uplus [A \cap V_2]$$

פירוק של A לאיחוד זר של קבוצות פתוחות (ב A) זרות לא ריקות. לכן A אינה קשירה.

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

פתרון. X קשירה אם ורק אם אין $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

8. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.
פתרון:

לא קשיר. הקבוצה $\{1\}$ סגוחה, כי ניתן לראות שגם היא וגם המשלים פתוחות, לפי הגדרת הטופולוגיה.

(ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\forall n$ $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}$, $O_n = \{0, ..., n\}$.
פתרון:

המרחב קשיר. אין קבוצה סגוחה לא טריוויאלית, כי כל קבוצה פתוחה שאינה ריקה חייבת להכיל את 0, ולכן לא תיתכן קבוצה פתוחה שאינה ריקה, שגם המשלימה שלה פתוחה.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.
פתרון:

המרחב אינו קשיר. הוכחנו בעבר שכל קבוצה מהצורה $p\mathbb{Z}$ היא סגוחה.

9. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.
פתרון:

לשם הפשטות נניח ש$A \cup B$ הוא כל המרחב שלנו. כלומר, $X = A \cup B$.

נניח בשלילה שA לא קשיר. אז יש פירוק לא טריוויאלי $A = O_1 \cup O_2$ קבוצות פתוחות בA וזרות. מכיוון שA פתוחת הן פתוחות גם בX. נשים לב שמכיוון ש$A \cap B$ קשירה, אז היא בהכרח מוכלת באחת מהקבוצות. בה"כ, $A \cap B \subseteq O_1$. לכן B וO_2 הן קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות שמכסות את X. בסתירה לכך שX קשיר. לכן Aקשיר. באופן זהה ניתן להוכיח שB קשיר.

10. מהם רכיבי הקשירות ב$\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית?
פתרון:

רק הנקודונים. הסבר: תהי $A \subseteq \mathbb{Q}$ קבוצה כך ש$|A| \geq 2$. נבחר $a < b \in A$. ידוע שקיים מס' אי רציונלי $a < r < b$. לכן $A = (A \cap (-\infty, r)) \cup (A \cap (r, \infty))$ הוא פירוק לא טריוויאלי של A לקבוצות פתוחות.

11. הוכיחו שבלתי קשירות לחלוטין היא תכונה תורשתית.
פתרון:

יהי X מרחב בלתי קשיר לחלוטין ו$Y \subseteq X$. ותהי $A \subseteq Y$ קבוצה בת יותר מאיבר 1. אזי כתת קבוצה של X היא לא קשירה, ולכן אינה קשירה גם כתת קבוצה של Y.