

דף תרגילים 3

1. קבעו האם המטריצה: חיובית לחלוטין / שלילית לחלוטין / לא מוחלטת (indefinite) / אחרת

א.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב.
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ג.
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. קבעו כיצד נראה הגרף של התבניות הריבועיות הבאות: פרבולויד אליפטי/פרבולויד היפרבולי/צילינדר פרבולי (שרטט בצורה כללית במערכת צירים):

א. $Q(X) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$

ב. $Q(X) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

ג. $Q(X) = -5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

ד. $Q(X) = -4x_1^2 + 12x_1x_2 - 9x_2^2$

3. מצאו משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ המתארת:

א. אליפסה שמרכזה ב $(5, -3)$ ואורכי ציריה 2 ו-4

ב. היפרבולה שהאסימפטוטות שלה הן $x = 6$ ו- $y = 2$ (האסימפטוטות של ההיפרבולה $xy = 1$ הן הצירים)

ג. פרבולה שקודקודה ב $(1, 1)$ והיא סימטרית ביחס לישר $y = x$

4. נתונה המשוואה הריבועית $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$

א. הראו שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור $[xy]$

ב. מצאו את מרכז ההיפרבולה. **תזכורת:** מרכז ההיפרבולה הוא נקודת החיתוך של האסימפטוטות.

ג. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבירו לצורה קנונית ומצאו מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

5. סכומי אינשטיין:

נתונה מטריצה A מסדר 2×2 , ידועה הנוסחה הכללית עבור הפולינום האופייני של מטריצה מסוג זה,

$$p(x) = x^2 + b_1x + b_2, \text{ כאשר המקדמים } b_i \text{ מוגדרים בעזרת העקבות של המטריצות } A, A^2:$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -T_1, \quad T_i = \text{Tr}(A^i)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(T_1^2 - T_2)$$

בטאו את משפט קיילי המילטון בעזרת נוסחה זו, בסימוני אינשטיין.

6. נתונה הפונקציה $y = x^3$

- א. מצאו פרמטרזציה של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים
- ב. הראו שהעקומה רגולרית.
- ג. האם $\delta(u) = (u^2, u^6)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?
- ד. חשבו את הווקטור המשיק והווקטור הנורמל בכל נקודה על העקומה. הנורמל הוא הווקטור הניצב למשיק, המתקבל מסיבוב של $\pi/2$ כנגד השעון של המשיק.
- ה. מצאו את עקמומיות העקומה (היעזרו בנוסחת Bateman)
- ו. מהי העקמומיות המינימאלית של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

7. נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = 4$

- א. חשבו את העקמומיות של העקומה המוגדרת ע"י המשוואה בעזרת נוסחת Bateman.
- ב. מצאו פרמטרזציה של העקומה
- ג. חשבו את מהירות העקומה לפי הפרמטרזציה שמצאתם בסעיף ב'. במידה והמהירות שונה מ-1, מצאו פרמטרזציית אורך קשת לעקומה
- ד. חשבו את העקמומיות של העקומה לפי ההגדרה $k = |\gamma''|$