אינפי 4 תרגול 7

12 במאי 2015

אינטגרל משטחי מסוג שני:

באינטגרל משטחי מסוג שני הפונקציה היא פונקציה וקטורית (ולא סקלרית).

לאינטגרל כזה יש משמעות של שטף, של זרימה דרך המשטח.

אנחנו נעבוד עם שדות וקטוריים $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ומשטחים דו מימדיים ב$-\mathbb{R}^3$.

בדומה לאינטגרל מסילתי מסוג שני, שם הייתה משמעות לכיוון המסילה, כאן יש משמעות לכיוון הנורמל.

באופן כללי, נורמל (יחידה) למשטח יכול להיות נורמל חיצוני, הפונה "החוצה", או נורמל פנימי, הפונה "פנימה".

אינטואיטיבית, אם השטף לתוך המשטח הוא a, אז השטף החוצה מהמשטח הוא $-a$ (מסתכלים על מה שנכנס כעל "מינוס" מה שיצא).

לכן, אינטגרל של שדה וקטורי על משטח מסוים עם נורמל פנימי יהיה הנגדי של האינטגרל של אותו השדה ואותו המשטח עם נורמל חיצוני.

אם לא צוין במפורש אחרת, נחשב את האינטגרל כאשר הנומרל למשטח הוא חיצוני.

איך מחשבים אינטגרל מסילתי מסוג שני?

בהינתן שדה וקטורי $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ (כאשר $P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$) ומשטח S הנתון ע"י פרמטריזציה:

$$\phi(u,v)=(\phi_1(u,v),\phi_2(u,v),\phi_3(u,v))$$

כאשר $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, האינטגרל המשטחי (כאשר הנורמל החיצוני) יהיה:

$$\iint_S F dS = \iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) dudv$$

כאשר הנורמל הוא פנימי נקבל:

$$-\iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) dudv$$

נזכור שמכפלה וקטורית היא אנטי קומוטטיבית, כלומר $\phi_u \times \phi_v = -\phi_v \times \phi_u$ ולכן כאשר הנורמל הוא פנימי נוכל לכתוב:

$$\iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_v \times \phi_u) dudv$$

דרך נוספת לסמן את האינטגרל היא:

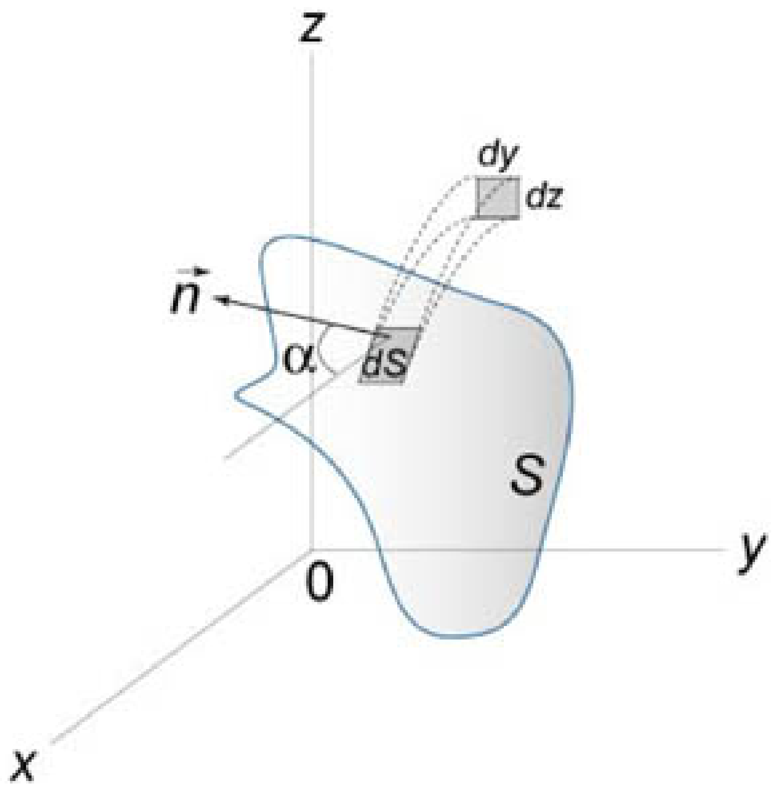
$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy$$

אם נסמן את הזוויות בין נורמל היחידה למשטח לבין ציר ה$-x$, ציר ה$-y$ וציר ה$-z$ ב$-\alpha, \beta, \gamma$ בהתאמה, מתקיים:

$$dydz = \cos\alpha dS, dxdz = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$$

ולכן אפשר לכתוב גם:

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$



$dydz = \cos\alpha dS$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים המשטחיים הבאים.

1. השדה הוקטורי הוא $F(x,y,z) = (x,-1,z)$ והמשטח S נתון ע"י $z = x\cos y$ כאשר $x \in [0,1], y \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ והנורמל הוא פנימי.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה, ופרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, x\cos y)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1,0,\cos y), \phi_y = (0,1,-x\sin y)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \cos y \\ 0 & 1 & -x\sin y \end{vmatrix} = i\cdot(-\cos y) - j\cdot(-x\sin y) + k\cdot 1$$

כלומר: $\phi_x \times \phi_y = (-\cos y, x\sin y, 1)$. כעת:

$$F(\phi(x,y)) = F(x,y,x\cos y) = (x,-1,x\cos y)$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_D (x,-1,x\cos y)\cdot(-\cos y, x\sin y, 1)dxdy = \iint\limits_D (-x\cos y - x\sin y + x\cos y)dxdy =$$

התחום D הוא: $D=[0,1]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ ולכן:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -x\sin y dydx = -\int\limits_0^1 x\cdot\cos y|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} dx = -(\frac{\sqrt{2}-1}{2})\cdot\frac{x^2}{2}|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

נזכור שהנורמל פנימי, ולכן נהפוך את הסימן ונקבל בסך הכל:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

2. השדה הוקטורי הוא $F(x,y,z)=(y,x,z)$ והמשטח S נתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$$

כאשר $u\in[0,2], v\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

<u>פתרון:</u>

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (0,0,1), \phi_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

ולכן:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = i\cdot(-\cos v) - j\cdot(\sin v) + k\cdot 0 = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

כעת:

$$F(\phi(u,v)) = F(\cos v, \sin v, u) = (\sin v, \cos v, u)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_D (\sin v, \cos v, u)\cdot(-\cos v, -\sin v, 0)dudv = \iint\limits_D -2\sin v\cos v dudv$$

התחום D הוא $D = [0,2]\times[\frac{\pi}{2},\pi]$, ולכן:

$$= \int\limits_0^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2v dvdu = 2\cdot(\frac{\cos 2v}{2})|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 2$$

3. השדה הוקטורי הוא $\vec{F} = i\cdot y - j\cdot x + k\cdot z$, והמשטח S נתון ע"י $z = \sqrt{x^2+y^2}$, כאשר $z \in [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה. פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$$

וקטורי הנגזרות יהיו:

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \phi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = i \cdot (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) - j \cdot (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) + k \cdot (1)$$

כלומר $\phi_x \times \phi_y = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$. כעת:

$$F(\phi(x,y)) = F(x, y, \sqrt{x^2+y^2}) = (y, -x, \sqrt{x^2+y^2})$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D (y, -x, \sqrt{x^2+y^2}) \cdot (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1) dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

נציג את התחום D בקואורדינטות קוטביות: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

$\theta \in [0, 2\pi]$ בנוהל. $r = \sqrt{x^2+y^2} = z$ ולכן $0 \le r \le 1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot ddrd\theta = 2\pi \cdot \frac{r^3}{3}|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

וזהו האינטגרל.