פתרון תרגיל 4 אינפי 4

22 באפריל 2015

1. ניתן לחשב את האינטגרל ע"י פרמטריזציה של העקומה; בהצלחה עם זה.

נחשב את האינטגרל בעזרת משפט גרין. דא עקא, שתנאי משפט גרין לא מתקיימים, מכיוון שהמסילה שלנו לא סגורה.

לכן, כדי שנוכל להשתמש במשפט גרין, נסגור את המסילה שלנו, ע"י קטע שנסמנו C_1 מהנקודה $(1,1)$לנקודה $(0,0)$ (זו בעצם התקדמות לאורך $y=x$).

האינטגרל הקווי שלנו יהיה סכום שני האינטגרלים הקוויים, האינטגרל המקורי שלנו והאינטגרל לאורך $y=x$.

כעת, השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P,Q)=(y+\tan^3 x, 3x+\tan^3 y)$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-1=2$$

ולפי משפט גרין, נקבל שסכום האינטגרלים שלנו הוא:

$$\int\limits_C+\int\limits_{C_1}=\iint\limits_D 2dxdy$$

כעת, התחום D שלנו הוא התחום הכלוא בין $y=x$ לבין $y=x^3$ בין הנקודות $(0,0)$ו$-(1,1)$.

עם קצת רצון וקצת אינפי 3, נשים לב שבתחום זה $x^3\le x$ ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$2\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^1(\int\limits_{x^3}^x dy)dx=2\int\limits_0^1(x-x^3)dx=2(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})|_0^1=\frac{1}{2}$$

כעת, נחשב את האינטגרל $\int_{C_1}$.
פרמטריזציה של הקטע לאורך $y=x$ היא $\gamma(t)=(t,t), t\in[0,1]$, והכיוון הפוך כמובן.
$\gamma'(t)=(1,1)$, ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$-\int_0^1 (t+\tan^3 t, 3t-\tan^3 t)\cdot(1,1)dt = -\int_0^1 4tdt = -2$$

ואם כן:

$$\int_C + \int_{C_1} = 2\iint_D dxdy \Longrightarrow \int_C = 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

וזהו האינטגרל שלנו.

2. מה בכלל ההבדל בין שני המקרים?

א. כאשר המסילה לא מקיפה את ראשית הצירים, התבנית גזירה ברציפות בכל התחום ולכן תנאי משפט גרין מתקיימים, וממשפט גרין האינטגרל יהיה 0.

ב. כאשר המסילה מקיפה את ראשית הצירים, לא נוכל להשתמש ישירות במשפט גרין, מכיוון שהתבנית לא גזירה ברציפות בכל התחום.

מה נעשה?

נקיף את הראשית במסילה סגורה ופשוטה קטנה מספיק, שהיא מעגל ושתהיה מוקפת כולה ע"י המסילה שלנו (חשבו למה אפשר לעשות זאת. אפשר להתבונן על המרחק של המסילה שלנו מהראשית כפונקציה. זו פונקציה רציפה ויש לה מינימום. ניקח מסילה פשוטה וסגורה שתקיף את הראשית ומרחקה מהראשית קטן מהמינימום של פונקציית המרחק של המסילה שלנו מהראשית).

כעת, נתבונן בתחום שנמצא בין המסילה שלנו לבין המסילה הקטנה שבנינו.
תחום זה הוא מה שקראנו לו תחום גרין, ולכן אפשר להשתמש במשפט גרין.
נסמן את המסילה הקטנה שלנו ב$-C_r$, מעגל עם רדיוס r.
השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P,Q)=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

ולכן משפט גרין האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy - \int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \iint\limits_D 0dxdy = 0$$

כלומר:

$$\int\limits_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

המסילה הקטנה היא מעגל עם הפרמטריזציה הרגילה: $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t), t \in [0, 2\pi]$. אם כן:

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

$$(P,Q) = (-\frac{r\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}, \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}) = (-\frac{\sin t}{r}, \frac{\cos t}{r})$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{\sin t}{r}, \frac{\cos t}{r}) \cdot (-r\sin t, r\cos t)dt = \int\limits_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

וגם האינטגרל שלנו שווה ל־2π.

3. ננסה להבין איך המשטחים נראים, ומכאן להסיק איך נראית פרמטריזציה מתאימה.

א. בחרוט שלנו, x, y יוצרים ביניהם מעגל שמרכזו בנקודה $(0,2,z)$. z יכול להיות חיובי או שלילי (הרדיוס של המעגל של x, y חייב כמובן להיות אי־שלילי, אך מכיוון שהוא מתואר ע"י z^2 הוא ממילא כזה), ולכן:

$$\phi(u,v) = (u\cos v, 2 + u\sin v, u)$$

כאשר $v \in [0, 2\pi], u \in \mathbb{R}$.

ב. מה קורה כאן? בניגוד ל־א', z חייב להיות אי־שלילי, ולכן זהו חרוט אחד ממש (ולא זוג חרוטים) עם קודקוד בראשית.

לכן, פרמטריזציה מתאימה תהיה:

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

כאשר $v \in [0, 2\pi], u \in [0, \infty)$.

ג. זהו כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 3. נשתמש בקואורדינטות כדוריות, ונקבל פרמטריזציה:

$$\phi(\theta, \rho) = (3 \sin\theta \cos\rho, 3 \sin\theta \sin\rho, 3 \cos\theta)$$

כאשר $\theta \in [0, \pi], \rho \in [0, 2\pi]$.

ד. נסתכל על האליפסואיד כ"מתיחה" של הכדור. אם כן, פרמטריזציה מתאימה תהיה:

$$\phi(\theta, \rho) = (2 \sin\theta \cos\rho, 3 \sin\theta \sin\rho, \cos\theta)$$

כאשר $\theta \in [0, \pi], \rho \in [0, 2\pi]$.

4. פרמטריזציה של האליפסואיד היא:

$$\phi(\theta, \rho) = (2 \sin\theta \cos\rho, 3 \sin\theta \sin\rho, \cos\theta)$$

נמצא ראשית כל את (θ, ρ) המתאימות לנקודה p. נקבל:

$$p = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (2 \sin\theta \cos\rho, 3 \sin\theta \sin\rho, \cos\theta)$$

נפתור את המשוואות. $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. כמו כן,

$$\sin\rho = \cos\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן $\rho = \frac{\pi}{4}$.

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_\theta(\theta, \rho) = (2 \cos\theta \cos\rho, 3 \cos\theta \sin\rho, -\sin\theta)$$

$$\phi_\rho(\theta, \rho) = (-2 \sin\theta \sin\rho, 3 \sin\theta \cos\rho, 0)$$

ובנקודה $(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4})$ שלנו:

$$\phi_\theta(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$$

$$\phi_\rho(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{4})=(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},0)$$

ולכן הצגה פרמטרית של המישור תהיה:

$$T_p(M)=\left\{(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}})+t(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{2}{3}})+s(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},0)|t,s\in\mathbb{R}\right\}$$