תרגול 2 – אדם צ'פמן

שאלה:

בהטלת קובייה הוגנת, מה הסיכוי שסכום המספרים הוא 7?

תשובה:

מרחב המדגם הוא $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(a,b) : 1 \leq a,b \leq 6\}$. המאורע הוא $E = \{(a,b) : a+b = 7\} = \{(a, 7-a) : 1 \leq a \leq 6\}$. מכיוון שמדובר במרחב מדגם סימטרי (קוביות הוגנות), $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

שאלה:

אם שלושה כדורים מוצאים באקראי (בסבירות שווה) מקערה המכילה 6 כדורים לבנים ו5 שחורים, מה הסיכוי שיצאו אחד לבן ו2 שחורים?

תשובה:

קבוצת הכדורים מורכבת מ6 כדורים לבנים, נסמנם במספרים 1 עד 6, ו5 כדורים שחורים, נסמנם במספרים 7 עד 11. מרחב המדגם הוא אם כך אוסף תתי-הקבוצות מגודל 3 של המספרים 1 עד 11

$\Omega = \{A \subset \{1, \ldots, 15\} : |A| = 3\}$. המאורע E הוא אוסף תתי הקבוצות מגודל 3 שבהן יש כדור לבן אחד ושניים שחורים, דהיינו $E = \{A \cup B : A \subset \{1, \ldots, 6\}, B \subset \{7, \ldots, 11\}, |A| = 1, |B| = 2\}$. מכיוון שמדובר במרחב מדגם סימטרי (הסיכוי של כל כדור להיבחר הוא שווה), $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}$.

שאלה:

ועד של 5 אנשים נבחר מתוך קבוצה של 9 נשים ו6 גברים. כל ועד אפשרי הוא בסיכוי שווה להיבחר. מה הסיכוי שיבחר ועד המורכב מ2 נשים ו3 גברים?

תשובה:

נסמן את קבוצת הנשים במספרים 1 עד 9 ואת הגברים במספרים 10 עד 15. מרחב המדגם הוא

$\Omega = \{A \subset \{1, \ldots, 15\} : |A| = 5\}$. המאורע הוא

$E = \{A \cup B : A \subset \{1, \ldots, 9\}, B \subset \{10, \ldots, 15\}, |A| = 2, |B| = 3\}$.

מכיוון שמדובר במרחב מדגם סימטרי, $P(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}}$.

שאלה:

בוחרים חמישה קלפים באקראי מתוך חפיסה סטנדרטית של 52 קלפים. מה הסיכוי שיצא סטרייט? (סטרייט = אוסף של חמישה קלפים במספרים עולים כך שלא כולם מאותה הצורה. לצורך סטרייט, אס יכול לתפקד או כ1 או כ14.)

תשובה:

מרחב המדגם Ω הוא כל תת קבוצה של חמישה קלפים מתוך החפיסה.

נביט תחילה במאורע E_1 של סטרייט המורכב מהקלפים אס, 2, 3, 4 ו5. כמות האופציות לבחירת חמישה קלפים כאלו, מכל צורה שהיא, היא 4^5. אולם, אנו רוצים להימנע מבחירת חמישה קלפים שכולם מאותה הצורה. כמות האופציות ה"רעות" היא 4. לכן $|E_1|=4^5-4$.

כעת, נגדיר את המאורע E_i בתור בחירת סטרייט המורכב מחמישה קלפים שהנמוך ביניהם הוא i. שימו לב שi נע בין 1 ל10. המאורע E של בחירת סטרייט כלשהו הוא בעצם האיחוד הזר של המאורעות הקודמים, דהיינו

$$E=E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_{10}$$

מכיוון שמדובר באיחוד זר, $|E|=|E_1|+\cdots+|E_{10}|=10(4^5-4)$.

מכיוון שמדובר במרחב מדגם סימטרי, $P(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$.

שאלה:

נתון מרחב מדגם Ω שאינו בהכרח סופי או סימטרי. נתונים שני מאורעות E וF. הוכח כי

$$P(E\cap F^c)=P(E)-P(E\cap F)$$

תשובה:

נסמן $A=E\cap F^c$ ו$B=E\cap F$. לפי כלל הכלה-הדחה

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

כעת, $A\cap B=E\cap F^c\cap E\cap F=E\cap(F\cap F^c)=E\cap\emptyset=\emptyset$, ולכן $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$.

בנוסף, $A \cup B = (E \cap F^c) \cup (E \cap F)$. לפי חוקי דה-מורגן, $E \cap (F^c \cup F) = (E \cap F^c) \cup (E \cap F)$ ולכן

$$A \cup B = E \cap (F^c \cup F) = E \cap \Omega = E$$

נציב זאת בנוסחה של עקרון הכלה-הדחה שלמעלה ונקבל

$$P(E) = P(E \cap F^c) + P(E \cap F) - 0$$

על-ידי העברת אגפים מקבלים

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$$

שאלה:

רון מנסה להתקבל לתל-חי. סיכויו להתקבל לקמפוס מזרח 0.7 ולקמפוס מערב 0.4. הסיכוי שיקבל תשובה שלילית לפחות מאחד הקמפוסים הוא 0.75.

א. מה הסיכוי כי לא יתקבל למכללה כלל?
ב. מה הסיכוי שיתקבל לקמפוס מזרח בלבד?

תשובה:

נסמן A כמאורע שבו הוא מתקבל לקמפוס מזרח, וB את המאורע שבו הוא מתקבל לקמפוס מערב.

אז $A \cap B$ הוא המאורע שבו הוא מתקבל לשני הקמפוסים, ו$(A \cap B)^c$ הוא המאורע בו קיבל דחייה לפחות מאחד מהם.

לפי הנתונים, $P((A \cap B)^c) = 0.75$, ולכן $P(A \cap B) = 0.25$.

כעת, $A \cup B$ הוא המאורע שבו הוא מתקבל לפחות לאחד הקמפוסים, ו$(A \cup B)^c$ הוא המאורע שבו לא התקבל כלל. לפי הכלה-הדחה

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.25 - 0.85$$

ואז $P((A \cup B)^c) = 0.15$. התשובה לסעיף א' אם כך היא 0.15.

המאורע שבו יתקבל רק לקמפוס מזרח הוא $A \cap B^c$. לפי השאלה הקודמת

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.25 - 0.45$$

ולכן התשובה לסעיף ב' היא 0.45.

הערה:

שימו לב שהמאורעות A וB אינם בלתי-תלויים. לו היו בלתי-תלויים, היינו מקבלים

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

אולם $P(A \cap B) = 0.25$.

זה אומר שקמפוס מזרח ומערב מתאמים ביניהם תשובות למועמדים מאחורי הקלעים.