טופולוגיה

תרגול 3

מרץ 21

תזכורת

- פונקציה $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא ליפשיץ אם היא מקיימת
$$d(x,y)\le\alpha\rho(f(x),f(y)).$$
- קבוצה $A\subseteq X$ היא פתוחה אם לכל $x\in A$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש-
$$B(x,\varepsilon)\subseteq A.$$
קבוצה היא סגורה אם המשלים שלה פתוח.
- התמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה היא פתוחה. כלומר אם $f:X\to Y$ רציפה ו- $B\subseteq Y$ פתוחה אז גם $f^{-1}(B)$.
- אם (X,d) מרחב מטרי ו- $A\subseteq X$ אז
$$d(x,A):=\inf_{a\in A}d(x,a).$$
ראינו בתרגול הראשון שיש גרסה של אי שיוויון המשולש למרחקים מסוג זה:
$$d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$$

והפעם...

- פונקציות רציפות
- קבוצות פתוחות וסגורות
- פעולת הסגור
- נקודות הצטברות
- תורת הקבוצות, סודרים ושורשים שליליים

קצת ZOOM לפני שמתחילים

- נא להישאר על Mute לאורך כל השיעור, אלא אם צוין אחרת.
- מוזמנים להתמש ב-Chat כדי לשאול ולענות אחד לשני על שאלות
- אחרי כל נושא, אתן זמן לשאלות.
- במהלך השיעור אני אשתמש בסקרים אנונימים כדי להבין את מצב הכיתה

סקר: פונקציות ליפשיץ 1

עבור $n \in \mathbb{N}$ נסתכל על פונקציית ההטלה $P_n : l_\infty \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$P_n(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}) := x_n.$$

מה מקדם ליפשיץ (הקטן ביותר) של P_n?

- 0
- 1
- n
- זו לא פונקציית ליפשיץ

$\{x_n\},\{y_n\} \in l_\infty$

$$|x_n - y_n| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |x_m - y_m| = d_\infty(\{x_n\},\{y_n\})$$

$||$

$1 \cdot |P_n(\{x\}) - P_n(\{y\})|$

$\bar{1} \quad \bar{0}$

סקר: פונקיות ליפשיץ 2

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. מה מקדם ליפשיץ של הפונקציה האפינית $\varphi_{a,b} : X \to X$ (עבור $a, b \in \mathbb{R}$) שמוגדרת ע"י

$$\varphi_{a,b}(x) := ax + b$$

- זו לא פונקציית ליפשיץ
- 1
- $\frac{b}{a}$.
- $|a|$.

סקר פונקציית ליפשיץ 3

נסתכל על הפונקציה $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ שמוגדרת ע"י $f(x) = \sqrt{x}$. מה מקדם ליפשיץ של f?

- זו לא פונקציית ליפשיץ
- ~~$\frac{1}{2}$~~
- ~~1~~
- ~~2~~

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$0, \frac{1}{10^4} \xrightarrow{f} 0, \frac{1}{10^2}$

$\ell = \frac{1}{10^2}$ [illegible] $\delta = \frac{1}{10}$

תרגיל משיעורי הבית (אולי)

יהי (X,d) מרחב מטרי ו- $A \subseteq X$. **הוכיחו** ש- $f_A : X \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f_A(x) := d(x,A)$ היא פונקציה רציפה. הסיקו מכאן ש-

$f_{\{0\}}(x)$

$\|x\| := d(x,0) = f_0(x)$

- כל נורמה היא פונקציה רציפה
- כדור סגור הוא סגור וכדור פתוח הוא פתוח
- כל קבוצה סגורה במרחב מטרי היא G_δ, כלומר חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.

$B[a,r] = f_a^{-1}([0,r])$

$(1, 1-\frac{1}{n}) \to (1,1)$

עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו אם היא פתוחה ואם היא סגורה (כל האפשרויות קבילות!!!):

פתוח ולא סגור

$A = f^{-1}((-\infty, 1))$ $\quad f(x,y) := x \cdot y$

- $A := \{(x,y) \mid xy < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ במטריקה ה- p-אדית. סגור
- $\mathbb{R}^n \setminus F$ עבור F סופית. פתוח ולא סגור
- $\mathbb{R}^n \setminus C$ עבור C בת מניה.
- $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$.

$\mathbb{Z} = B[0,1] = B(0, 1\frac{1}{2})$

$f(x) := \min_{a\in F} d(x,a)$

$f^{-1}((0,\infty))$

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\boxed{\overline{\lim} \frac{1}{n}\sum a_n > 0}$

$(0,1)$

$g(x) := \inf_{a\in C} d(x,a)$

$\mathbb{R}^n \setminus C \neq g^{-1}((0,\infty))$

$x \in \mathbb{R}^n \setminus C$

$g(x) = 0$

תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה בת מניה. מה ניתן לומר על $\mathbb{R}^n \setminus C$ בוודאות

- היא פתוחה
- היא סגורה
- היא סגוחה (סגורה ופתוחה)
- היא לא סגורה ולא פתוחה
- אי אפשר לדעת

מה שכן, היא לא סגורה כי C לא פתוחה

$C_1 := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\Downarrow$

C לא סגורה

$C_2 = cl(C_1)$

$C_2 := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$

$\Downarrow$

C סגורה

תזכורת:

- קבוצה היא G_δ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
- קבוצה היא F_σ אם היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות.

תזכורת:

- קבוצה היא G_δ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
- קבוצה היא F_σ אם היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות.

הוכיחו שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא G_δ. הסיקו שכל קבוצה פתוחה במרחב מטרי היא F_σ.

קבועות לבסוף ב-l_∞

במרחב l_∞ ניקח את תת הקבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף:

$$A := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid \exists n_0, \forall m > n_0 : x_m = 0\}.$$

מצאו את הסגור של A.

$x \in cl(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

טענה: $cl(A) = \{\{y_n\} \in l_\infty \mid \{y_n\} \subseteq \mathbb{R}$ מתכנסת ל-0 $\} := B$

$cl(A) \subseteq B$: יהי $\varepsilon > 0$, $\{x_n\} \in cl(A)$, צ"ל $n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 : |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$

קיים $\{y_n\} \in A$ כך ש- $d_\infty(\{x_n\},\{y_n\}) < \varepsilon$. קיים $n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0$ $y_n = 0$, $<\varepsilon$

$\forall n \geq n_0$ $|x_n| \le |x_n - y_n| + |y_n| \le \varepsilon$

נסתכל על אותה קבוצה A אבל הפעם ב- l_p עבור $1 \le p < \infty$. מה הסגור של A? ענו ב-ZOOM?

- A
- l_p
- ~~קבוצת הסדרות המתכנסות~~

$$d_p(\{x_n\},\{y_n\}) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_2 := \sqrt{\sum |x_n - y_n|^2}$$

$$\|\{x\}\|_p := d_p(\{x_n\}, 0)$$

$$\ell_p := \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|\{x_n\}\|_p < \infty \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \notin \ell_p$$

$$a_n \to 0 \Leftarrow \sum a_n < \infty$$

$\boxed{\text{רבוי למה 2}}$

תרגיל: הגדרה שקולה לסגור

הוכיחו שהסגור של קבוצה הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה אותה.

שימו לב שבגלל שחיתוך של קבוצות סגורות הוא עדיין סגור, הקבוצה הקטנה ביותר שמכילה את A היא בהכרח

$$\bar{A} := \boxed{\min\{S \supseteq A \mid S^c \in \tau\} = \bigcap_{S \supseteq A, S^c \in \tau} S.}$$

$$\bar{A} \doteq cl(A)$$

$$cl(A) = scl(A)$$

$$x_n^{(k)} \to x^{(k)}$$

$$x^{(k)} \to x$$

$$x_n^{(k)} \to x$$

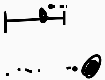
$$x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1 \cdots \to x^{(1)}$$

$$x_1^2 \quad x_2^2 \quad x_3^2 \cdots x^{(2)}$$

נקודות הצטברות

תזכורת: נגיד ש- x היא *נקודת הצטברות* של $A \subseteq X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $A \ni a \neq x$ כך ש- $d(x,a) \leq \varepsilon$.

במילים אחרות:



$$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset.$$

נסמן את קבוצת נקודות ההצטברות של A כ- A'.

$$[0,1] \cup \{2\} \cup \left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right\}_{N \in \mathbb{N}}$$

$A \not\subseteq A' \wedge A' \not\subseteq A$

תרגיל: אפיון של קבוצה סגורה באמצעות נקודות הצטברות

הוכיחו שקבוצה A היא סגורה אם ורק אם $A' \subseteq A$.

$\Leftarrow$

נניח כי A סגורה ויהי $x \in A'$

$\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon)\setminus\{x\} \cap A \neq \emptyset$

$\Downarrow$ ולכן

$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

לפי הגדרה

$x \in cl(A) = A$

$\Rightarrow$

נב' $A' \subseteq A$ A סגורה

כלומר A^c פתוחה.

ניקח $x \in A^c$, שרירותי.

$x \in A^c \subseteq (A')^c$

לפי הגדרה קיים ε

$B(x,\varepsilon)\setminus\{x\} \cap A = \emptyset$

$x \notin A$ ולכן

$B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

$B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$

$\blacksquare$

תרגיל: קבוצת נקודות ההצטברות היא תמיד סגורה

הוכיחו שלכל קבוצה A מתקיים ש- A' סגורה.

תרגיל: קנטור בנדיקסון

לכל קבוצה $A \subseteq X$ במרחב מטרי נסמן $A^{(n)} := A''^{\cdots}$ (כלומר הנגזרת ה-n-ית). נסמן גם $A^{(0)} := A$. נגדיר אפילו $A^{(\omega)} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. דרגת קנטור בנדיקסון מוגדרת ע"י

$cb([0,1])=0$

$$cb(A) := \min\{n \in \mathbb{N} \cup \omega \mid A^{(n)} = A^{(n+1)}\}$$

שימו לב שהיא לא תמיד קיימת. קבוצה היא מושלמת אם דרגת קנטור-בנדיקסון (Cantor Bendixon) שלה היא 0. מצאו תת קבוצות של $\mathbb{R}$ שמקימות את התנאים הבאים:

- קבוצה שהנגזרת השניה שלה ריקה אבל לא הראשונה
- קבוצה מושלמת לא ריקה
- קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא 2 והנגזרת שלה אף פעם לא ריקה
- קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא ω.

המשך: קנטור בנדיקסון

$A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

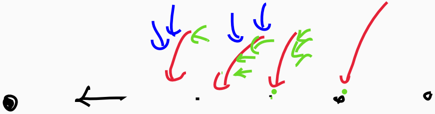
- קבוצה שהנגזרת השניה שלה ריקה אבל לא הראשונה
- קבוצה מושלמת לא ריקה

$[0,1]$, $\mathbb{R}$, [illegible]

- קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא 2 והנגזרת שלה אף פעם לא ריקה

$A \cup [-1,0]$

- קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא ω.



תרגיל: משוואות p-אדיות

תזכורת: ההשלמה $\overline{\mathbb{Z}}_p$ של $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא אוסף כל הסכומים $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p^n$ עבור $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

פתרו את המשוואות הבאות מעל **השלמים** ה-p-אדים $\overline{\mathbb{Z}}_p$:

- $2x = 1$ כאשר $p = 3$
- $x^2 = -7$ כאשר $p = 2$.

משוואה ראשונה

$$2x = 1, p = 3$$

$$z := \sum p^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n$$

$$3z = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n = z - 1$$

$$2z = -1$$

$$z = -\frac{1}{2}$$

$$2(z+1) = -1 + 2 = 1$$

$$1 + \sum 3^n$$

$$\left(1 + \sum^{N} 3^n\right)_{N \in \mathbb{N}} \qquad 2z_n \sim 1$$

משוואה שניה

$$x^2 = -7, p = 2$$

משוואה שניה

$$x^2 = -7, p = 2$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!x^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}$$

משוואה שניה

$$x^2 = -7, p = 2$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!x^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}$$

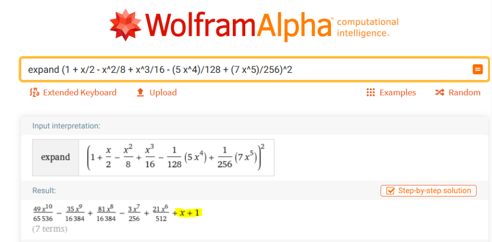
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256}.$$

משוואה שניה

$$x^2 = -7, p = 2$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!x^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256}.$$



משוואה שניה

$$x^2 = -7, p = 2$$

$$\sqrt{-7} = (1 + (-8))^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!(-8)^n}{4^n(n!)^2(2n-1)} =$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!8^n}{4^n(n!)^2(2n-1)}$$

משוואה שניה

N	S_N	S_N^2	$S_N^2 + 7$	$\lvert S_N^2 + 7 \rvert_2$
1	-3	9	16	0.062500
2	-11	121	128	0.007812
3	-43	1849	1856	0.015625
4	-203	41209	41216	0.003906
5	-1099	1207801	1207808	0.001953
6	-6475	41925625	41925632	0.000977
7	-40267	1621431289	1621431296	0.000977
8	-259915	67555807225	67555807232	0.000244
9	-1724235	2972986335225	2972986335232	0.000122

0

סקר: שלמים p-אדים

למה מהמשוואות הבאות **אין** פתרון מעל השלמים ה-2-אדים:

- $5x = 2$
- $x^2 = 17$
- $2x = 3$
- $x^2 = 9$

תרגיל: גרף של פונקציה רציפה

הוכיחו שגרף של פונקציה רציפה הוא סגור. כלומר שעבור $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה,

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

היא קבוצה סגורה.
האם ההפך נכון?

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)
- אפשר להשתמש בפונקציות רציפות כדי להוכיח שקבוצות הן פתוחות או סגורות.

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)
- אפשר להשתמש בפונקציות רציפות כדי להוכיח שקבוצות הן פתוחות או סגורות.
- הסגור הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה קבוצה נתונה

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)
- אפשר להשתמש בפונקציות רציפות כדי להוכיח שקבוצות הן פתוחות או סגורות.
- הסגור הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה קבוצה נתונה
- נקודות הצטברות זה כיף

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)
- אפשר להשתמש בפונקציות רציפות כדי להוכיח שקבוצות הן פתוחות או סגורות.
- הסגור הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה קבוצה נתונה
- נקודות הצטברות זה כיף
- יש יותר "שלמים" p-אדים ממה שהייתם מצפים

סיכום

- המטריקה והנורמה הן פונקציות רציפות (גם יחסית לקבוצה)
- אפשר להשתמש בפונקציות רציפות כדי להוכיח שקבוצות הן פתוחות או סגורות.
- הסגור הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה קבוצה נתונה
- נקודות הצטברות זה כיף
- יש יותר "שלמים" p-אדים ממה שהייתם מצפים