הרצאה 18

נכתב על ידי נועם יערי

משפט סילו הראשון

לכל חבורה סופית שסדרה מתחלק ב – p יש תת חבורה p – סילו.

הוכחה

$$p^t \mid\mid |G|$$

צריך להוכיח שיש תת חבורה מסדר p^t (כאשר $t = 1$ זה משפט קושי).

<u>מקרה ראשון: $p \mid |Z(G)|$</u>

לפי משפט קושי $K \leq Z(G)$ מסדר p.

$K \lhd G$ ואפשר לעבור ל - ${G}/{K}$.

$$p^{t-1} \mid\mid \left|{G}/{K}\right|$$

לפי הנחת האינדוקציה יש ל - ${G}/{K}$ תת חבורה p – סילו, כלומר יש $K \subseteq P \leq G$ כך ש - ${P}/{K}$ היא תת חבורה p – סילו, כלומר $\left|{P}/{K}\right| = p^{t-1}$ לכן $|P| = p^t$.

<u>מקרה שני: $p \nmid |Z(G)|$</u>

נפעיל את שוויון המחלקות:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\substack{x \notin Z(G) \\ \text{אחד מכל} \\ \text{מחלקה}}} [G : C_G(x)]$$

בהכרח קיים x עם $[G : C_G(x)] \nmid p$, ואז $p^t \mid\mid |C_G(x)|$. לפי הנחת האינדוקציה יש ב - $C_G(x)$ תת חבורה מסדר p^t.

$\square$

טענה

נניח $G \rhd P$ תת חבורה p – סילו, $G \geq Q$ תת חבורה – p. אז $Q \subseteq P$.

הוכחה

$$|PQ| = \frac{|P| \cdot |Q|}{|P \cap Q|}$$

בגלל ש - $PQ \leq G$.

כלומר PQ חבורת p –. אבל, P חבורת p – מקסימלית ולכן :

$$PQ = P \Longrightarrow Q \subseteq P$$

מסקנה

תת חבורה p – סילו נורמלית היא יחידה.

מסקנה

במקרה הכללי, $P \leq G$ תת חבורה p – סילו, כל תת חבורה p – של $N_G(P)$ מוכלת ב - p.

משפט סילו השני

כל תת חבורה p – סילו של G צמודות זו לזו.

הוכחה

נתבונן בקבוצה :

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \text{תת חבורות} \\ G \text{ סילו של } p - \end{matrix} \right\}$$

- G פועלת על Ω על ידי הצמדה.
- נבחר $p \in \Omega$. p פועלת בהצמדה על Ω. הגודל של כל מסלול מחלק את $|p|$ ולכן הוא חזקה של p (יכול להיות 1). נניח ש - $Q \in \Omega$ מהווה נקודת שבת. אז $P \subseteq N_G(Q)$ אבל $Q \lhd N_G(Q)$ ולכן $P = Q$. כלומר, בפעולת p על Ω יש נקודת שבת אחת ויחידה (p) ומסלולים בגודל חזקות של p.
  לכן :
  $$|\Omega| \equiv 1 (mod\ p)$$
- נסמן ב - Ω_0 את המסלול של p תחת פעולת G. אם $\Omega = \Omega_0$, סיימנו. נניח שיש $Q \notin \Omega_0$.
- כפי שהוכחנו קודם,
  $$|\Omega_0| \equiv 1\ (mod\ p)$$
  לפי פעולת p על Ω_0.
- גם Q פועלת על Ω_0, בלי נקודת שבת ואז $|\Omega_0| = 0\ (mod\ p)$.

הוכחנו גם את משפט סילו השלישי:

משפט סילו השלישי

מספר תת חבורות p – סילו שקול ל 1 מודולו p.

מסקנה

תהי Q תת חבורת p כלשהי של G.

$$1 \equiv |\Omega| \equiv \text{מספר תת חבורות } p-\text{סילו המכילות את } Q$$

לכן כל תת חבורה p מוכלת בתת חבורה p – סילו.