20:30

מבחן מועד ג' - תשפ"א

1. **(30 נק')** תהי סדרה עבורה $a_1 > 12$ המקיימת לכל n טבעי כי:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$$

ונביט בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{9 \cdot a_n}{a_1}\right)^{2 \cdot n}$$

א. **(10 נק')** מצאו את גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty} a_n$

ב. **(10 נק')** מצאו ערך של $a_1 > 12$ עבורו הטור מתכנס בהחלט.
אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

ג. **(10 נק')** מצאו ערך של $a_1 > 12$ עבורו הטור מתבדר.
אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

<u>פתרון:</u>

(א) ראשית, נניח שיש גבול ולאחר מכן נוכיח את קיומו:
הרכבנו סדרה ועליה כך בגבול ולכן:

נסמן: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n =: L \geq 0$

כי a_n סדרה חיובית [$a_1>0$ ובפרט $a_1>12$ ושורש הוא תמיד חיובי.]

$$L \longleftarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n+6} \longrightarrow \sqrt{L+6}$$

ומיחידות הגבול נקבל:

$$L = \sqrt{L+6} \quad /()^2$$
$$L^2 = L+6$$
$$L^2 - L - 6 = 0$$
$$(L-3)(L+2) = 0$$
$$L_1 = 3, \quad \underbrace{L_2 = -2}$$

a_n סדרה חיובית ולכן לא אפשרי.

לכן, במידה והגבול קיים, $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

נוכיח שזה אכן הגבול.

נוכיח ש- a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע.

חסומה מלרע ע"י 3:

אינדוקציה:

בסיס: $n=1$: $a_1>12$ ולכן גם $a_1>3$. כנדרש.

צעד: נניח נכונות עבור n ונוכיח ל- $n+1$, כלומר

נניח ש $a_n>3$ וצ"ל: $a_{n+1}>3$. נזכור ש:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6} > \sqrt{3+6}=\sqrt{9}=3.$$

הנחת האינדוקציה. כנדרש.

אכן a_n חסומה מלרע ע"י 3.

נוכיח מונוטונית יורדת:

אינדוקציה:

בסיס: $n=1$: $a_2=\sqrt{12+6}=\sqrt{18}<12=a_1$.

ולכן גם לכל $a_1>12$: $a_2=\sqrt{a_1+6}<a_1$.

צעד: נניח נכונות עבור n ונוכיח ל- $n+1$.

כלומר נניח $a_{n+1}<a_n$ וצ"ל: $a_{n+2}<a_{n+1}$.

$$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}+6} < \sqrt{a_n+6} = a_{n+1}$$

הנחת האינדוקציה. כנדרש.

סה"כ a_n מונו' יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת.

לכן, $L=3$, כלומר: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. כנדרש.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{9\cdot a_n}{a_1}\right)^{2\cdot n}$ צ"ל: עבורו $a_1>12$ הטור מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^{2n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^{2n}$$

נעזר במבחן השורש:

$$\sqrt[n]{\left(\left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^2\right)^n} = \left(\frac{9\overset{\nearrow 3}{a_n}}{a_1}\right)^2 \to \left(\frac{27}{a_1}\right)^2$$

צריך שזה יהיה קטן מ-1, כלומר:

$$\left(\frac{27}{a_1}\right)^2 < 1 \Rightarrow 27^2 < a_1^2 \Rightarrow a_1 = 28$$

לדוגמא.

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{9\cdot a_n}{a_1}\right)^{2\cdot n}$ צ"ל: $a_1>12$ עבורו הטור מתבדר.

עבור $a_1 = 13$

$$\frac{9a_n}{a_1} \to \frac{9\cdot 3}{13} = \frac{27}{13} > 1$$

ולכן $(-1)^n\cdot\left(\frac{9a_n}{a_1}\right)^{2n} \not\to 0$ ולכן הטור מתבדר.

2. (30 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

א. (10 נק') גבול הסדרה:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+8}\right)^{n+2}$$

ב. (10 נק') גבול הסדרה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{5^n+4^n}$$

ג. (10 נק') גבול הפונקציה:

$$\lim_{x\to -6}\frac{x^3+7\cdot x^2-36}{x^2+8\cdot x+12}$$

א.

$$\left(\frac{n+1}{n+8}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+8-7}{n+8}\right)^{n+2} = \left(1-\frac{7}{n+8}\right)^{n+2} = \frac{\left(1+\frac{-7}{n+8}\right)^{n+8}}{\left(1-\frac{7}{n+8}\right)^6} \to \frac{e^{-7}}{1^6} = e^{-7}.$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{5^n+4^n}$$

$$\frac{6^n}{5^n+4^n} \geq \frac{6^n}{5^n+5^n} = \frac{6^n}{2\cdot 5^n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^n \longrightarrow \infty$$

סדרה הנדסית עם $q>1$ ולכן שואפת ל-∞.
וכפל בקבוע לא משנה.

לכן מסנדוויץ' לאינסוף - $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{5^n+4^n} = \infty$. כנדרש.

ג.

$$\lim_{x\to -6}\frac{x^3+7\cdot x^2-36}{x^2+8\cdot x+12}$$

$$\frac{x^3+7x^2-36}{x^2+8x+12} = \frac{(x-2)(x+3)\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}(x+2)} = \frac{(x-2)(x+3)}{x+2} \xrightarrow[x\to -6]{} \frac{(-6-2)(-6+3)}{(-6+2)} =$$

$$= \frac{-8\cdot(-3)}{-4} = -6.$$

כנדרש.

3. **(48 נק')** תהי פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+(-2\cdot a-6)\cdot x+a^2+6\cdot a+8}{x+2} & x>-2\\[2ex] x & x\leq -2\end{cases}$$

א. **(12 נק')** כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה רציפה בנקודה $x=-2$

ב. **(12 נק')** כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה רציפה במ"ש בקטע $(-2,0)$

ג. **(12 נק')** כתבו את כל ערכי a עבורם הפונקציה גזירה בנקודה $x=-2$

ד. **(12 נק')** נתון כי הפונקציה גזירה בנקודה $x=-2$, חשבו את הנגזרת $f'(-2)$

(א) נחשב את הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -2.$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{(-2)^2+(-2a-6)\cdot(-2)+a^2+6a+8}{-2+2} =$$

$$= \frac{4+4a+12+a^2+6a+8}{0} = \frac{a^2+10a+24}{0} = \frac{(a+6)(a+4)}{0}$$

אם המונה בגבול מימין שונה מאפס הפונקציה
לא תהיה רציפה כי הגבול לא יהיה סופי, לכן עבור
$a=-6, a=-4$ יש סיכוי. נבדוק:
עבור $a=-4$:

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+2x}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} x = -2$$

אכן הגבולות הצדדיים שווים (וסופיים) ואכן:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = -2 = f(-2)$$

והפונקציה אכן רציפה עבור $a=-4$. כנדרש.

עבור $a=-6$:

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+6x+8}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x+4)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} (x+4) =$$
$$= -2+4 = 2$$

הגבולות הצדדיים קיימים ושונים ולכן הפונקציה
לא רציפה ויש לה נקודת אי רציפות סליקה.

(ב) רציפה במ"ש ב-$(-2,0)$.
עבור $a \neq -6,-4$ הפונקציה אינה חסומה
בקטע $(-2,0)$ ולכן אינה רציפה במ"ש.
עבור $a=-6,-4$, יש גבול ב-2- (סופי) וגם
ב-0 ולכן רציפות ב-$(-2,0)$ + גבולות סופיים בקצוות
ולכן רציפה במ"ש.

(ג) ראשית, אם f גזירה אזי היא גם רציפה, לכן האפשרות היחידה היא $a=-4$, נקבל:

$$f(x)=\begin{cases} x & x>-2 \\ x & x\leq -2 \end{cases} = x$$

בוודאי גזירה ב-2-.

(ד) נתון שגזירה ב-2-, לכן: $f(x)=x$.
ראינו ש: $f'(x)=1$ לכל הממשיים ולכן:
$f'(-2)=1$. מסקנה:
כנדרש.