פתרון תרגיל 5 אנליזה הרמונית תש"ף

2 בדצמבר 2019

1. נשתמש בטורים הממשיים של הפונקציות האלו, אותם כבר חישבתם (את x בהרצאה ואת $|x|$ בתרגול).

(א) הטור הממשי הוא:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n} \sin nx$$

כלומר: $a_0 = a_n = 0,\ b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, כאשר $n \in \mathbb{N}$. אי לכך:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = 0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{0 - i\frac{2(-1)^{n+1}}{n}}{2} = \frac{i\left(-1\right)^n}{n}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{0 + i\frac{2(-1)^{n+1}}{n}}{2} = \frac{i\left(-1\right)^n}{-n} = \frac{i\left(-1\right)^{-n}}{-n}$$

ואפשר לומר שכאשר $n \in \mathbb{Z}$: $c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$. אם כן, הטור הוא:

$$x \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i\left(-1\right)^n}{n} e^{inx}$$

(ב) הטור הממשי הוא:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi\left(2k-1\right)^2} \cos\left(\left(2k-1\right)x\right)$$

כלומר: $b_n = 0,\ a_{2k} = 0,\ a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}$ והחמוד: $a_0 = \pi$, כאשר $n, k \in \mathbb{N}$. בהתאם לזאת:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$c_{2k-1}=\frac{a_{2k-1}-ib_{2k-1}}{2}=\frac{-2}{\pi\left(2k-1\right)^{2}}$$

$$c_{-(2k-1)}=\frac{a_{2k-1}+ib_{2k-1}}{2}=\frac{-2}{\pi\left(2k-1\right)^{2}}=\frac{-2}{\pi\left(-\left(2k-1\right)\right)^{2}}$$

$$c_{2k}=c_{-2k}=0$$

ואפשר לומר שכאשר $k\in\mathbb{Z}$: $c_{2k}=0$, $c_{2k-1}=\frac{-2}{\pi(2k-1)^{2}}$. אם כן, הטור הוא:

$$|x|\sim\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{-2}{\pi\left(2k-1\right)^{2}}e^{i(2k-1)x}+\frac{\pi}{2}$$

2. נסמן את מקדמי פורייה של f ב־c_n, ואת מקדמי פורייה של $Re\left(f\right)$ ב־d_n. מתקיים:

$$c_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx,\quad d_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(f\left(x\right)\right)e^{-inx}dx$$

ובכן:

$$d_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(f\left(x\right)\right)e^{-inx}dx=d_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(x\right)+\overline{f\left(x\right)}}{2}e^{-inx}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f\left(x\right)}e^{-inx}dx\right)$$

כעת, נשים לב שמתקיים:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f\left(x\right)}e^{-inx}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f\left(x\right)e^{inx}}dx=\overline{\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-i(-n)x}dx}=\overline{c_{-n}}$$

המחובר השמאלי הוא c_n, ולכן:

$$d_{n}=\frac{1}{2}\left(c_{n}-\overline{c_{-n}}\right)$$

3. כתותחי אינטגרציה, התרגיל לא יקשה עלינו:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h\left(x\right)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x-t\right)g\left(t\right)dte^{-inx}dx =$$

נשנה את סדר האינטגרציה:

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x-t\right)e^{-inx}dx\right)g\left(t\right)dt$$

נבצע שינוי משתנים: $u = x - t$, ואז $x = u + t,\ du = dx$ (חשבו מה קורה לגבולות!) ונקבל:

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(u\right)e^{-in(u+t)}du\right)g\left(t\right)dt$$

אנו יודעים ש: $e^{-in(u+t)} = e^{-inu}\cdot e^{-int}$ ונקבל:

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(u\right)e^{-inu}du\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g\left(t\right)e^{-inu}dt = \alpha_n\beta_n$$

כנדרש.