

המשך תרגיל משיעור קודם:

חישובנו נוסחת איטרציה עבור שיטת יעקובי –

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} * \vec{x}_n + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאשר –

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - יהי הניחוש}$$

בצע 6 איטרציות:

רכיבי הווקטור x	ניחוש התחלתי x_0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.5	0.2	0.45	0.324	0.429	0.376
y_n	0	0.6	0.1	0.352	0.142	0.248	0.16
z_n	0	1	0.52	0.92	0.718	0.886	0.802

■

תזכורת (שיטת יעקובי):

$$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}} + \underbrace{D}_{\substack{\text{אלכסונית}}} + \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

נציב במערכת המשוואות –

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$((L + U) + D)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + U)\vec{x} + D\vec{x} = \vec{b}$$

$$D\vec{x} = \vec{b} - (L + U)\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}}$$

כאשר דורשים ש – $a_{11}, \dots, a_{nn} \neq 0$ וזה קורה אם ורק אם $\|D\| \neq 0$.

$$\Rightarrow B = -D^{-1}(L + U), \vec{c} = D^{-1}\vec{b}$$

שיטת גאוס – זיידל

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$[(L + D) + U]\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + D)\vec{x} + U\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + D)\vec{x} = \vec{b} - U\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = (L + D)^{-1}\vec{b} - (L + D)^{-1}U\vec{x}}$$

בכתיב נוסף –

$$\vec{x}_{n+1}^{\text{new}} = (L + D)^{-1} * \vec{b} - (L + D)^{-1} * U * \vec{x}_n^{\text{old}}$$

$$\Rightarrow B = -(L + D)^{-1}U, \vec{c} = (L + D)^{-1}\vec{b}$$

הערה:

גאוס-זיידל מהירה יותר מבחינת התכנסות מיעקובי, אך יש מקרים שבהם גאוס-זיידל לא מתכנס ויעקובי כן תתכנס!

תרגיל:

נותנה המערכת –

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

בצע שתי איטרציות בשיט גאוס-זיידל, כאשר וקטור התחלתי הינו $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נפרק את A לשלוש המטריצות כפי שמתואר בשיטה –

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נוסחת גאוס-זיידל:

$$\vec{x}_{n+1} = -(L + D)^{-1} * U * \vec{x}_n + (L + D)^{-1} * \vec{b}$$

נחשב את המקדמים –

$$(L + D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & 0.1667 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (L + D)^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & 0.1667 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix}$$

ונחשב גם את –

$$\begin{aligned} -(L + D)^{-1}U &= -\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & 0.1667 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0.3333 \\ 0 & 0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן –

$$\boxed{\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0.3333 \\ 0 & 0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix} \vec{x}_n + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix}}$$

נבצע כמה איטרציות –

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.9167 \\ 2.9445 \\ -1.0279 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.9723 \\ 2.9816 \\ -1.0094 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{x}_8 = \begin{pmatrix} 1.9999 \\ 3.000 \\ -1.0002 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כאשר הערך האמיתי הינו}$$

■

שאלה:

האם ניתן לפתור את המערכת הבאה בעזרת גאוס זיידל או יעקובי.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 2 & 4 & \boxed{8} & 0 & 14 \\ 2 & \boxed{6} & 1 & 1 & 10 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

פתרון:

נרצה שלמטריצה A יהיה תנאי של אלכסון שולט. לכן –

$$R_1 \leftrightarrow R_4, R_3 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 14 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 3}_{A'} & & & & 5 \end{array} \right)$$

ונשים לב כי אכן מתקיים תנאי של אלכסון שולט עבור A' –

$$|5| > |3| + |0| + |1|$$

$$|6| > |2| + |1| + |1|$$

$$|8| > |4| + |2| + |0|$$

$$|3| > |1| + |1| + |0|$$

נשים לב כי המשוואה לא השתנתה ולכן עכשיו שיש תנאי אלכסון שולט, ניתן לבצע את שיטות גאוס-זיידל או יעקובי והן יתכנסו לכל ניחוש התחלתי.



הערות:

(1) תנאי אלכסון שולט $\Leftrightarrow 2$ השיטות יתכנסו!

(2) אם התנאי האלכסון השולט לא מתקיים זה לא אומר שהשיטה לא תתכנס, ולכן צריך לבדוק אם $\|B\| < 1$, לפי הנורמות הידועות (L_1, L_2, L_∞ - לא משנה).

$$B =_{\text{גאוס זיידל}} (L + D)^{-1}U, B =_{\text{יעקובי}} D^{-1}(L + U)$$

(3) יש תנאי הכרחי ומספיק –

$$\rho(B) < 1$$

שהוא גורר התכנסות.

(4) גאוס-זיידל מהיר יותר, אבל יש מקרים שגאוס-זיידל לא יעבוד ואומנם יעקובי כן.

פירוק QR

לכל מטריצה A בעלת עמודות בת"ל יש פירוק –

$$A = Q * R$$

כאשר:

Q – מטריצה אורתוגונלית.

R – מטריצה משולשית עליונה.

שיטת QR בעזרת *householder*:

$$\|\vec{x}\| = \alpha, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נסמן $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (אורכו הוא n) ונקבל –

$$u = \vec{x} - \alpha e_1, v = \frac{u}{\|u\|}$$

ובעזרת שיטת *householder* נקבל –

$$Q = I - 2vv^T$$

תרגיל:

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

מצאו פירוק QR .

פתרון:

נעשה לפי התהליך –

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|x\| = \alpha = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = 14$$

$$\Rightarrow \alpha e_1 = 14 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u = x - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- לכן

$$Q_1 = I - 2vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

- וכעת

$$Q_1 * A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

- ואכן

Handwritten equation on grid paper: $Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha * \dots * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{A'} \end{matrix}$. A note in Hebrew says: "כפפה לנישון אגזא תלפנה א' עבני".

- באופן כללי

$$Q = Q_1 * Q_2 * \dots * Q_t$$

$$R = Q_t * \dots * Q_2 * Q_1 * A$$

- לכן

$$A' = \begin{pmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -49 \\ 168 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\| = \alpha = \sqrt{2401 + 28224} = 175$$

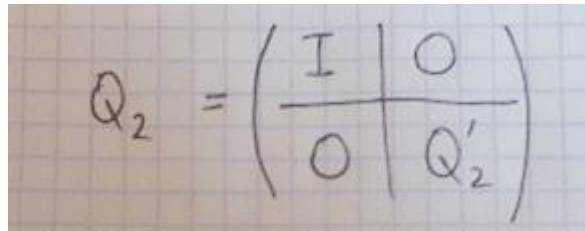
$$\Rightarrow u = x - \alpha e_2 = \begin{pmatrix} -49 \\ 168 \end{pmatrix} - 175 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -224 \\ 168 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{280} \begin{pmatrix} -224 \\ 168 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל -

$$Q'_2 = I - 2vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1225} \begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

וכעת צריך לעשות -



$$\Rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

ולכן -

$$Q = Q_1 * Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 * Q_1 * A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

■

