סימון

עבור $A, B \lhd G$.

הקומוטטור של x, y:

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

ונסמן:

$$[A,B] = \langle [a,b] \big|_{b \in B}^{a \in A} \rangle$$

הגדרה

הסדרה הנגזרת:

$$G' = [G,G], \qquad G^{(k+1)} = {G^{(k)}}'$$

תרגיל: ${}^{G}/_{K}$ אבלית אם ורק אם $G' \subseteq K$.

הגדרה

סדרה נורמלית היא סדרה תת נורמלית כך שלכל i: $G_i \lhd G$.

טענה

התכונות הבאות על חבורה סופית G שקולות:

1. יש סדרת הרכב עם מנות אבליות (או ציקליות או ציקליות מסדר ראשוני).
2. יש סדרה תת נורמלית עם מנות אבליות.
3. יש סדרה תת נורמלית עם מנות ציקליות.
4. יש סדרה תת נורמלית עם מנות ציקליות מסדר ראשוני.
5. יש סדרה נורמלית עם מנות אבליות.

משפט

G פתירה אם ורק אם קיים k כך ש - $G^{(k)} = 1$.

הוכחה

$\boxed{\Longrightarrow}$

נתבונן בסדרה

$$1 = G^{(k)} \lhd G^{(k-1)} \lhd \cdots \lhd G'' \lhd G' \lhd G$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & = & G_k & \lhd & \cdots & \lhd & G_3 & \lhd & G_2 & \lhd & G_1 & \lhd & G_0 & = & G \\
 & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & \\
 & & G_0^{(k)} & & & & G_2' & \swarrow & G_1'' & \swarrow & G_0' & & & & \\
 & & & & & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & & & \\
 & & & & & & G_1'' & \swarrow & G_0'' & & & & & & \\
 & & & & & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & & & & & \\
 & & & & & & G_0''' & & & & & & & &
\end{array}
$$

□

מסקנה

תת חבורה של חבורה פתירה היא פתירה.

הוכחה

$H \le G$ כאשר G פתירה.

אז יש k כך ש - $H^{(k)} \subseteq G^{(k)} = 1$. □

דוגמא

עבור קובייה הונגרית 3×3.

$R =$ תמורות על המדבקות של הקובייה.

$$R \subseteq S_{54} = \underset{\text{פינות}}{3 \times 8} + \underset{\text{צדדים}}{2 \times 12} + \underset{\text{מרכזים}}{6}$$

$$R \subseteq S_{24} \times S_{24}$$

$$R_3 = R \cap S_{24_{\text{מדבקות של פינות}}}$$

$$\begin{matrix}\text{תת חבורה} \\ \text{של } \mathbb{Z}_3^8\end{matrix} \hookleftarrow R_3 \to S_8$$

מתקיים:

$$R_3 \cong (Z_3^8)_{0 \cong \mathbb{Z}_3^7} \rtimes S_8$$

$$R_2 \cong (\mathbb{Z}_2^{12})_0 \rtimes S_{12}$$

נסתכל על:

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbb{Z}_3^8)_0 \rtimes S_8) & \times & ((\mathbb{Z}_2)_0^{12} \rtimes S_{12}) \\ & | & \\ & R & \\ & | & \\ ((\mathbb{Z}_3^8)_0 \rtimes A_8) & \times & ((\mathbb{Z}_2^{12})_0 \rtimes A_{12}) \end{array}$$

לכן:

$$|R| = \frac{8!}{2} \cdot \frac{12!}{2} \cdot 3^7 \cdot 2^{11} \cdot 2$$

הגדרה

סדרה נורמלית $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_i \rhd G_{i+1} \rhd \cdots$ **היא מרכזית** אם לכל i:

$$G_i/G_{i+1} \lhd Z\left(G/G_{i+1}\right)$$

בפרט המנות אבליות.

טענה

קריטריון למרכזיות:

$$A \lhd G, \qquad A \lhd B \lhd G$$

$$[G,B] \subseteq A \Leftrightarrow B/A \subseteq Z(G/A)$$

הוכחה

$$B/A \subseteq Z(G/A) \Leftrightarrow [G,B]A/A = [G/A, B/A] = A/A$$

חישוב עזר:

$$[gA, bA] = (gA)(bA)(gA)^{-1}(bA)^{-1} = gbg^{-1}b^{-1}A = [g,b]A$$

הגדרה

חבורה היא **נילפוטנטית** אם יש לה סדרה מרכזית המחברת את G ל -1.

הערה

כל חבורה נילפוטנטית היא פתירה כי המנות של סדרה מרכזית הן אבליות.

הגדרה

עבור חבורה G. נגדיר את **הסדרה המרכזית היורדת**:

$$\begin{gathered} G_{(1)} \coloneqq G \\ G_{(2)} = [G,G] \\ G_{(3)} = \big[G,[G,G]\big] \\ G_4 = \Big[G,\big[G,[G,G]\big]\Big] \\ \vdots \\ G_{(n+1)} = G\big[G,G_{(n)}\big] \end{gathered}$$

$$\cdots \lhd G_{(n+1)} \lhd G_{(n)} \lhd \cdots \lhd G_{(1)} = G$$

מקבלים:

$$\begin{gathered} \big[G,G_{(n)}\big] \subseteq G_{(n+1)} \\ \Rightarrow {}^{G_n}\!\big/_{G_{(n+1)}} \subseteq Z\left({}^{G}\!/_{G_{(n+1)}}\right) \end{gathered}$$

מסקנה

לכל סדרה מרכזית

$$\cdots \lhd G_4 \lhd G_3 \lhd G_2 \lhd G_1 = G$$

מתקיים:

$$G_{(n)} \subseteq G_n$$

הוכחה

באינדוקציה על n.

עבור $n = 1$:

שוויון לפי ההנחה.

נניח $G_{(n)} \subseteq G_n$. אז:

$$G_{(n+1)} = \big[G,G_{(n)}\big] \subseteq [G,G_n] \subseteq G_{(n+1)}$$

$\square$

מסקנה

G נילפוטנטית אם ורק אם יש n כך ש - $G_{(n)} = 1$.

הגדרה

הסדרה המרכזית העולה:

$$\zeta_0 G = 1$$
$$\zeta_1 G = Z(G)$$

$\zeta_{n+1} G$ מוגדרת כך ש - :

$$\zeta_{n+1}G/_{\zeta_n G} = Z\left(G/_{\zeta_n G}\right)$$

מסקנה

לכל סדרה מרכזית $\cdots \lhd G_2 \lhd G_1 \lhd 1$ של G, מתקיים: $G_n \subseteq \zeta_n G$.

סיכום

G נילפוטנטית $\Leftrightarrow$ הסדרה המרכזית היורדת מגיעה ל $1 -$, כלומר קיים n כך שמתקיים $G_n = 1$.
$\Leftrightarrow$ הסדרה המרכזית העולה מגיעה ל $G -$, כלומר קיים n כך ש - $\zeta_n G = G$.

משפט

התכונות הבאות (של חבורה סופית G) שקולות:

1. G נילפוטנטית.
2. לכל $H \lneqq G$, $H \lneqq N_G(H)$.
3. כל תת חבורה מקסימלית היא נורמלית.
4. כל תת חבורה סילו היא נורמלית.
5. $G =$ מכפלה ישרה של חבורות $p -$.

הוכחה

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

$H \lneqq G$. נתבונן בסדרה מרכזית $1 \lhd G_n \lhd \cdots \lhd G_2 \lhd G_1 \lhd G_0$.

נבחר m המינימלי כך ש $G_m \subseteq H -$.

תרגיל: (מכיוון ש - $\left({}^{G_{(m-1)}}\!\big/_{G_m} \subseteq Z\left({}^{G}\!/_{G_m}\right)\right)$, $G_{m-1} \subseteq N_G(H)$.

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$

לכל $M \lneqq G$ מקסימלית, $M \lhd G \Leftarrow N_G(M) = G \Leftarrow M \lneqq N_G(M) \leq G$.

$\boxed{4 \Leftarrow 3}$

תהי P תת חבורת סילו. נניח $P \subseteq N_G(P) \neq G$.

יש $N_G(P) \subset G$ מקסימלית. כעת, $M = N_G(M) = G$, סתירה.

$\boxed{5 \Leftarrow 4}$

הוכחנו.

$\boxed{1 \Leftarrow 5}$

אם G, H נילפוטנטיות אז גם $G \times H$ נילפוטנטית, כי $[G \times H]_{(n)} = G_{(n)} \times H_{(n)}$.

תהי P חבורת $p -$ אז $\zeta_1 p \neq 1$, ובאינדוקציה, $\zeta_n G \subset \zeta_{n+1} G$. כלומר כל חבורת $p -$ נילפוטנטית.

משפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית

- $(n,m)=1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$
- איבר מסדר סופי נקרא "מפותל".

  חבורה אבלית נוצרת סופית חסרת פיתול $= \mathbb{Z}^n$.

  חבורה אבלית נוצרת סופית מפותלת היא סופית.

  כל חבורה אבלית נוצרת סופית $=$ סופי $\times\, \mathbb{Z}^n$.

- כל חבורה אבלית סופית היא מכפלה ישרה של חבורות $p-$ אבליות.
- כל חבורת $p-$ אבלית סופית היא מכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

לכן כל חבורה אבלית נוצרת סופית היא מכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

הגדרה

המכפלה $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ (כאשר $d_i = 0$ משמעו $\mathbb{Z}$) נקראת **צורה קנונית** אם מתקיים:

$$d_1|d_2, d_2|d_3, \cdots, d_{n-1}|d_n$$

משפט המיון

לכל חבורה אבלית נוצרת סופית יש צורה קנונית יחידה.

— סוף הקורס —