מבוא לאלגברה לניארית 89119

סמסטר א תשע"ח

פתרון שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & k & -1 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 0 & k & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = 2R_3 - kR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 0 & 0 & 10-k(k+3) & 4-2k \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{4-2k} \qquad \underbrace{-k^2-3k+10}$$

א. אם הביטוי $-k^2-3k+10$ מתאפס והביטוי $4-2k$ לא מתאפס אז נקבל שורת סתירה. לכן $k=-5$ אין פתרון.

ב. כאשר $k=2$ מקבלים שורת אפסים ע"כ אינסוף פתרונות.

ג. פתרון יחיד כאשר $k \neq 2,-5$

ד. הפתרון הכללי יהיה:

כאשר $k=2$:

נקבל:-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח ש $z=t$ ואז

$$2y+5t=2$$

$$2y=2-5t$$

$$\boxed{y=1-\frac{5}{2}t}$$

$$x-3t=-3$$

$$\boxed{x=3t-3}$$

$$\boxed{z=t}$$

$$\left(3t-3,\ 1-\frac{5}{2}t,\ t\right)$$

<u>או אפשר</u>

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

$$\begin{vmatrix} (x-1) & 3 & -3 \\ 0 & x+2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(x-1)\left[(x+2)-3\right] + 0 + \left[-9+3(x+2)\right]$$

$$(x-1)(x+2) - 3(x-1) + 3x - 3 =$$

$$(x-1)(x+2) - 3\cancel{(x-1)} + \cancel{3(x-1)} = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x \neq 1$$

$$x \neq -2$$

עבור $x = 1$ המטריצה לא הפיכה

ועבור $x \neq 1, -2$ המטריצה כן הפיכה

$|A| = -4$ $\quad$ $A^{3\times3}:$

i $\quad |2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = 2^3 \cdot |A|^{-1} = 8 \cdot (-4)^{-1} = 8 \cdot \frac{1}{-4} = -2$

ii $\quad |A^3| = |A|^3 = (-4)^3 = -64$

__שאלה 3:__

צריכים לבצע פעולות אלמנטריות על מנת
להגיע ממטריצה A למטריצה B:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \xrightarrow[E_1]{R_2 \leftarrow R_2 \cdot 2} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[E_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow 4R_3]{} _{E_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix} \xrightarrow[E_4]{R_3 + 3R_1 \to R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 2R_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_1$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 4R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = E_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3R_1 \to R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} = E_4$$

$$E_4 \cdot E_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&4\end{pmatrix}$$

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\3&-3&4\end{pmatrix}$$

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\3&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&0\\3&-6&4\end{pmatrix} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \underset{\text{בדיקה}}{=} \overset{B}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix}}$$

לכן מה שמצאנו היה נכון.

פתרון שאלה 3

סעיף ב'

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow \frac{1}{4}R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_2\cdot\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A$$

לכן

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{F_4}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{F_3}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}}_{F_2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}}_{F_1}\cdot B=A$$

פתרון שאלה 4

פתרון שאלה 4

קודם כל נראה שהיא הפיכה ע"י חישוב ה $|A|$.

$$|A| = 1\cdot[1\cdot -7 - -2\cdot 2] + -1[1\cdot -2 - 2\cdot 1] = (1\cdot(-3)+4) = 1 \neq 0$$

לכן A הפיכה:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3]{R_1 \leftarrow R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 11 & -5 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$