פתרון תרגיל 3 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית
תשע"ו

16 במרץ 2016

1. נביא את התבניות הריבועיות לצורה קנונית.

(א) המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}6&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\ \sqrt{2}&5&1\\ \sqrt{2}&1&5\end{pmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-6&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}&\lambda-5&-1\\ -\sqrt{2}&-1&\lambda-5\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-6)\left((\lambda-5)^2-1\right)+\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}(\lambda-5)-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}(\lambda-5)\right)=$$

$$=(\lambda-6)\left(\lambda^2-10\lambda+24\right)-2\left((\lambda-5)+1\right)-2\left(1+(\lambda-5)\right)=$$

$$=(\lambda-6)^2(\lambda-4)-4(\lambda-4)=(\lambda-4)\left(\lambda^2-12\lambda+32\right)=$$

$$=(\lambda-4)^2(\lambda-8)$$

הע"ע הם $\lambda=4,4,8$.

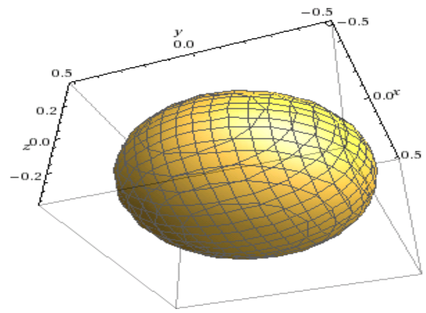
אם נציב $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=1$$

כלומר:

$$4\left(x'\right)^2+4\left(y'\right)^2+8\left(z'\right)^2=1$$

זהו אליפסואיד.



(ב) המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\-2&-2&-6\\-4&-6&-1\end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=3,6,-9$.

אם נציב $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

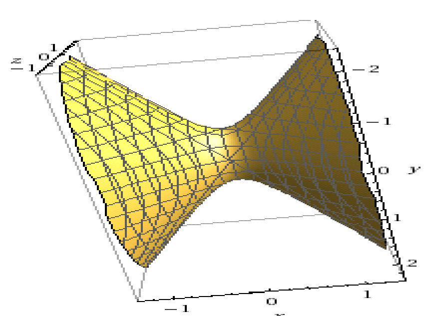
נקבל:

$$\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=1$$

כלומר:

$$-9\left(x'\right)^2+3\left(y'\right)^2+6\left(z'\right)^2=1$$

זהו היפרבולואיד חד־יריעתי.



(ג) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{3}{2}\left(xy+xz+yz\right)=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=-\frac{5}{4},1,1$.

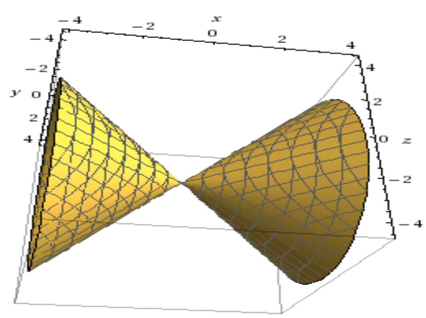
אם נציב $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=0$$

כלומר:

$$-\frac{5}{4}\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2=0$$

זהו חרוט.



(ד) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$2z^2-5xz+z-4xz+10x^2-2x-6yz+15xy-3y=0$$

כלומר:

$$10x^2+2z^2+15xy-9xz-6yz-2x-3y+z=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} 10 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $0, \frac{12\pm\sqrt{406}}{2} = \lambda$.

מכיוון שיש לנו ביטויים של x,y,z כבודדים, נצטרך למצוא את המטריצה המלכסנת במפורש.

הוקטורים העצמיים המתאימים לע"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-82\pm\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29\mp2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$. אנו צריכים לנרמל אותם:

$$\frac{1}{\sqrt{7.8237}}\begin{pmatrix} \frac{-82+\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29-2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{74.6015}}\begin{pmatrix} \frac{-82-\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29+2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1.1644}}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

אלו עמודות המטריצה המלכסנת P.

אם נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y^2=\frac{275+12\sqrt{406}}{131}x^2$$

במישור אלו שני ישרים, אך במרחב התלת מימדי אלו שני מישורים.

(ה) המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $1,0,0 = \lambda$.

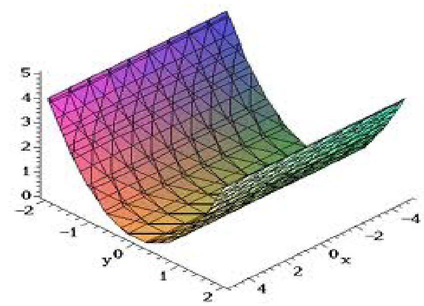
הו"ע המתאימים הם: $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ננרמל אותם ונקבל שהמטריצה המלכסנת היא:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y = x^2$$

במישור זוהי פרבולה; במרחב זהו גליל פרבולי.



(ו) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$-(x')^2 - \frac{3}{2}(y')^2 - \frac{5}{2}(z')^2 = 1$$

זהו אליפסואיד "דמיוני", קבוצה ריקה.

2. נסובב למשל סביב ציר ה-z. מטריצות הסיבוב המתאימות הן:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ב) נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$$

(ג) נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

3. נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונסווג באמצעות ההסיאן.

(א) נשווה $\nabla f=0$ ונקבל:

$$\begin{cases}f_x=6x+3x^2=0\\f_y=6y+4=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x=0,-2$ ומהמשוואה השנייה נקבל $y=-\frac{2}{3}$, ולכן הנקודות הן:

$$\left(0,-\frac{2}{3}\right),\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$$

ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix}6x+6&0\\0&6\end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$H_f\left(0,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$$

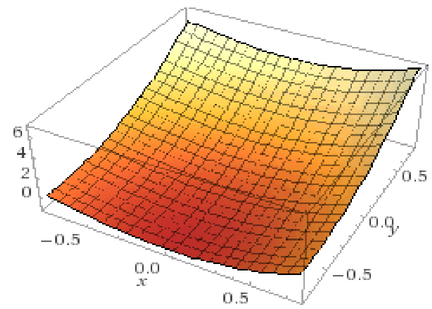
שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

באופן דומה:

$$H_f\left(-2,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&6\end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



(ב) נשווה $\nabla f = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x = -3y + 3x^2 = 0 \\ f_y = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y = x^2$. נציב זאת במשוואה השנייה:

$$-3x + 3x^4 = 0$$

ולכן $x = 0, 1$ והנקודות הן:

$$(0,0)\,,(1,1)$$

ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

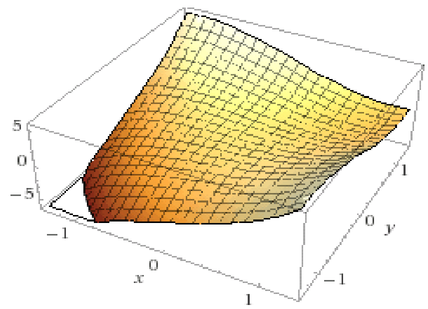
לפיכך:

$$H_f\,(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

הע"ע שניהם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
באופן דומה:

$$H_f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.
הגרף נראה כך:


5
0
−5
−1
0
x
1
1
0
y
−1