תרגול באינפי 2 -תיכוניסטים

סדרות וטורים של פונקציות.

הגדרה: סדרה $\{f_n(x)\}$ של פונקציות היא התאמה, שבה לכל n טבעי מתאימה פונקציה $f_n(x)$.

לכל x_0 השייך לתחום ההגדרה של $\{f_n(x)\}$ שנציב, נקבל **סדרת מספרים**: $\{f_n(x_0)\}$.

אם $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת, אז נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ **מתכנסת נקודתית** ב-x_0.

אם $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית לכל $x_0 \in I$, אז נאמר ש-$\{f_n(x)\}$ **מתכנסת נקודתית בקטע** I.

הגדרה: בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, **פונקצית הגבול** (אם קיימת) היא: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

דוגמה: קבע התכנסות של: $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: לכל $x\in[0,1)$ מתקיים: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. עבור $x=1$: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} 1^n=1$.

בסה"כ סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בכל $[0,1]$ ופונקצית הגבול היא: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. נאמר כי $\{f_n(x)\}$ **מתכנסת במידה שווה בקטע** I, אם: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ |\ \forall n>n_0, \forall x\in I:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

הסבר: תהא $f(x)$ פונקצית הגבול של הסדרה $\{f_n(x)\}$ בקטע I. נגדיר "פס ε" להיות המרווח בין $f(x)-\varepsilon$ ל- $f(x)+\varepsilon$. הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בקטע I לפונקצית הגבול, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שממנו והלאה, כל $f_n(x)$ תהיה מוכלת כולה (לאורך הקטע I), בתוך פס ה-ε (סביב פונקצית הגבול).

דוגמה: תהא סדרת הפונקציות $g_k(x)=\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2$ בקטע $[0,1]$.

פונקצית הגבול היא: $\forall x\in[0,1]:\quad g(x)=\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2=x^2$.

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בקטע.

נבדוק התכנסות במ"ש: $\forall x\in[0,1]:\quad \left|g_k(x)-g(x)\right|=\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2-x^2\right|=\frac{\left|x^2\right|}{k}\le\frac{1}{k}$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ נוכל לקחת: $k_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ולקבל:

$$\forall k>k_0,\ \forall x\in[0,1]:\ \left|g_k(x)-g(x)\right|<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\varepsilon$$

כלומר k_0 תלוי רק ב- ε ולא ב- x ולכן $g_k(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקצית הגבול בקטע $[0,1]$.

משפט: אם $\{f_k(x)\}$ פונקציות רציפות ומתכנסות במ"ש בקטע I, אז פונקצית הגבול $f(x)$ רציפה ב- I.

לכן אם קיבלנו שפונקצית הגבול אינה רציפה בקטע I, בהכרח ש $\{f_k(x)\}$ אינה מתכנסת במ"ש בקטע.

למשל מכאן ש- $f_k(x)=x^k$ אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$ (ראה תרגיל קודם).

ההיפך לא נכון – תיתכן סדרת פונקציות שאינה מתכנסת במ"ש בקטע מסוים, ואף על פי כן פונקצית הגבול שלה רציפה באותו הקטע (דוגמה בהמשך).

משפט (מבחן ה- $\lim-\sup$): סדרת פונקציות $\{f_k(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ בקטע I,

אם"ם: $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\sup\limits_{x\in I}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}\right]=0$.

תרגיל: קבע התכנסות של $f_k(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)$ ב: א. $[a,b]$ $a>0$ ב. $(0,\infty)$.

פתרון: נבדוק התכנסות נקודתית: $\forall x_0>0: \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x_0)=\lim_{k\to\infty}\ln\left(x_0+\frac{x_0^2}{k}\right)=\ln(x_0)$

כלומר הסדרה מתכנסת נקודתית בשני הסעיפים.

נבדוק התכנסות במ"ש. בסעיף א':

$$\sup_{x\in[a,b]}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\ln\left(1+\frac{b}{k}\right)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

כלומר ההתכנסות היא במידה שווה.

עבור סעיף ב': $\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\infty\xrightarrow{k\to\infty}\neq 0$

כלומר כאן ההתכנסות אינה במ"ש (זו דוגמה לכך שרציפות הפונקציה הגבולית אינה גוררת התכנסות במ"ש).

תרגיל: בדוק התכנסות של סדרת הפונקציות: $f_k(x)=\frac{kx}{1+k^2x^2}$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את הפונקציה הגבולית: $\forall x\in[0,1]: \quad f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{kx}{1+k^2x^2}=0$

קיבלנו פונקציה רציפה ולכן אנו לא יכולים בשלב הזה לשלול את ההתכנסות במ"ש של הסדרה.

נבדוק זאת עפ"י מבחן ה- $\lim-\sup$: $\sup_{x\in[0,1]}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}=\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}$

ההפרש הוא פונקציה רציפה בקטע סגור ולכן ה- $\sup$ הוא גם מקסימום (ויירשטראס 2). נגזור ונאפס:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{nx}{1+k^2x^2}\right)=n\left(\frac{x}{1+k^2x^2}\right)'=k\cdot\frac{1+k^2x^2-x\cdot 2k^2x}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=k\cdot\frac{1-k^2x^2}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=0$$

נקודת הקיצון מתקבלת בנקודה: $x=\frac{1}{k}\in[0,1] \quad \Rightarrow \quad 1=k^2x^2$.

לפני $x=\frac{1}{k}$ הנגזרת חיובית ולאחריה שלילית כלומר זו נקודת מקסימום, והיא גלובלית.

מכאן: $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}=\left.\frac{kx}{1+k^2x^2}\right|_{x=\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0$

כלומר הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

הערה: באופן כללי, אין צורך לבדוק אם ישנן נק' קיצון נוספות, שכן אם המבחן תקף בנק' אחת, אז ודאי שיהיה תקף עבור נקודת הקיצון הגלובלית.

תרגיל: הוכח או הפרך:

$\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש בקטע I $\Leftarrow$ הפונקציה הגבולית $f(x)$ חסומה ב- I.

פתרון: לא נכון. למשל: $f_k(x)=\frac{1}{x}$ (סדרת פונקציות קבועה) בקטע $(0,1)$. פונקצית הגבול היא $\frac{1}{x}$ ואינה חסומה בקטע $(0,1)$.

הגדרה: טור של פונקציות $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ המוגדרות בתחום A נקרא **מתכנס** (נקודתית) לסכום $S(x)$ בתחום $D\subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $S(x)$ לכל $x\in D$.

הגדרה: טור של פונקציות $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ המוגדרות בתחום A נקרא **מתכנס במ"ש** לסכום $S(x)$ בתחום $D\subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל- $S(x)$ ב- D.

מבחני התכנסות לטורים (להתכנסות במ"ש):

1. **קריטריון** $\lim-\sup$: טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

2. **מבחן M ויירשטראס:** טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום A מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם קיים טור חיובי מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ של מספרים קבועים כך שלכל $x \in D$ מתקיים $|f_k(x)| \le a_k$.

3. **מבחן דיריכלה:** אם

   א. $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ טור חסום בקטע $[a,b]$, כלומר קיים קבוע $M > 0$ כך ש- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$.

   ב. $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$ ל- 0,

   אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$

4. **משפט דיני:** יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות **רציפות ואי שליליות** בקטע $[a,b]$. אם הטור מתכנס לפונקציה **רציפה** $S(x)$, אזי ההתכנסות היא במ"ש.

משפט: יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ ל- $S(x)$, אזי $S(x)$ רציפה.

הערה: משפט זה שימושי לשלילת התכנסות במ"ש.

טור פונקציות חשוב: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ מתכנס לכל $-1 < x < 1$

תרגילים:

1. מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+x^2\right)^n}$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+x^2\right)^n}{(n+1)\left(1+x^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{1+x^2}$$

$\frac{1}{1+x^2}<1$ לכל $x\neq 0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x\neq 0$.

אם $x=0$ מבחן דלאמבר נכשל. נציב $x=0$ בטור ונקבל טור הרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

לסיכום הטור מתכנס לכל $x\neq 0$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right|\cdot\left|\frac{e^{(n+1)x}}{e^{nx}}\right|=e^x$$

$e^x<1$ לכל $x<0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x<0$

אם $x>0$ הטור מתבדר

אם $x=0$ מבחן דלאמבר נכשל ולכן נציב $x=0$ בטור ונקבל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}$

(ניתן להשוות עם טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ע"י מבחן ההשוואה הגבולי)

לסיכום הטור הנתון מתכנס לכל $x\leq 0$.

∞

ג. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$

פתרון: נשתמש במבחן דלאמבר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(1-x)}{x^n(1-x)}\right|=|x|$

אם $|x|<1$ הטור מתכנס בהחלט

אם $|x|>1$ הטור מתבדר

אם $|x|=1$ מבחן דלאמבר נכשל- נבדוק התכנסות ע"י הצבה.

נציב $x=1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}0=0$ טור מתכנס

נציב $x=-1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2$ טור מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס)

לסיכום קיבלנו שהטור הנתון מתכנס בקטע $(-1,1]$.

4. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$ מתכנס במ״ש ב-$[0,1]$.

הוכחה: נגדיר $f(x)=x(1-x)$ נמצא את נקודת המקסימום שלה בקטע $[0,1]$.

$f'(x)=1-2x=0$, $x=\frac{1}{2}$ ולכן הערך המקסימלי של הפונקציה בקטע הנ״ל הינו $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

$\left|x^n(1-x)^n\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ לכל $x\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ זהו טור הנדסי מתכנס ולכן לפי מבחן M-ויירשטראס הטור הנתון מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

לפי מבחן לייבניץ לטור עם סימנים מתחלפים מתקיים

$$\left|r_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{k}\right|\le a_{n+1}=\frac{x^2}{n+1}$$

ולפי מבחן $\lim-\sup$ נקבל $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,3]}\left|r_n(x)\right|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,3]}\left|\frac{x^2}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0$ ולכן הטור מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

תרגיל: הוכח כי הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ מתכנס במ"ש לפונקציה $\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון הוא פיתוח מקלורן של $\sin x$. לכן הטור מתכנס נקודתית לפונקציה בקטע.

כמו כן שארית הטור היא למעשה שארית לגרנז': $r_n(x)=R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

נבדוק עפ"י קריטריון קושי התכנסות במידה שווה. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\left|r_n(x)\right|\right\}=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|\right\}=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\right\}=\frac{(2\pi)^{2n+3}}{(2n+3)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש ל-$\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$ אבל לא בכל $\mathbb{R}$!

5. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנס במ״ש ב-$[-1,3]$?

פתרון: מבחן M-ויירשטארס נכשל במקרה זה, כי $\left|\frac{(-1)^n x^2}{n}\right|\le\frac{9}{n}$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n}$ טור מתבדר.

לפי מבחן לייבניץ לטור עם סימנים מתחלפים מתקיים

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{k}\right|\le a_{n+1}=\frac{x^2}{n+1}$$

ולפי מבחן $\lim-\sup$ נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-1,3]}|r_n(x)|\le\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-1,3]}\left|\frac{x^2}{n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0$ ולכן הטור מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

תרגיל: קבע התכנסות של הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$.

פתרון: מתוך אי-שיוויון המשולש: $\forall x\in\mathbb{R}: |r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos kx}{k^2}\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

הביטוי הימני שקיבלנו הוא שארית של טור המספרים: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ המתכנס, ולכן עפ"י קושי מתקיים לגביו:

$r_n\xrightarrow{n\to\infty}0$. לכן גם: $r_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, ומכאן שהטור שלנו מתכנס במ"ש בכל הישר.

מהתרגיל האחרון נוכל להסיק באופן כללי יותר את המשפט הבא:

משפט - מבחן ה-M של ווירשטראס: יהא $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ טור פונקציות מוגדר בקטע I . אם קיים טור מספרים חיובי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, כך ש: $\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in I: \; |f_k(x)|\le a_k$ אזי $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I.

תרגיל: הוכח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}x^k(1-x)^k$ מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את המקסימום של: $x(1-x)=x-x^2$ בקטע $[0,1]$ ע"י גזירה ואיפוס:

$x=\frac{1}{2}\;\Rightarrow\;1-2x=0$ כמו כן: $(1-2x)'=-2<0$ כלומר זו נק' מקסימום (ובקצוות הביטוי מתאפס).

ולכן מתקיים: $\forall x\in[0,1]:\;0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$ ומכאן: $\forall k\ge 1, \forall x\in[0,1]:\;0\le x^k(1-x)^k\le\frac{1}{4^k}$.

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}$ מתכנס, ולכן עפ"י מבחן ה-M של ווירשטראס הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$.

משפט: יהא $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בקטע I לפונקצית הסכום $S(x)$.

אזי $S(x)$ רציפה בקטע זה.

(התכנסות במ"ש של טור הפונקציות היא התכנסות במ"ש של הסס"ח שלו $\{S_n(x)\}$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x)$ הוא סכום <u>סופי</u> של פונקציות רציפות בקטע I, ולכן גם $S_n(x)$ רציפה בו. מכאן שפונקצית הגבול $S(x)$ בהכרח גם רציפה בו (משפט). □)

דוגמה: הראה שהפונקציה $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x}{1+k^7 x^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: נמצא מקסימום של $f_k(x) = \frac{k^2 x}{1+k^7 x^2}$:

$$f_k'(x) = k^2 \left(\frac{x}{1+k^7 x^2} \right)' = k^2 \frac{1+k^7 x^2 - x \cdot 2xk^7}{\left(1+k^7 x^2\right)^2} = k^2 \frac{1-k^7 x^2}{\left(1+k^7 x^2\right)^2}$$

אם כן: $x = \pm \frac{1}{k^{3.5}} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0$. נציב ונקבל: $f_k\left(\frac{1}{k^{3.5}}\right) = \frac{k^{2-3.5}}{1+1} = \frac{1}{2k^{3/2}}$.

מכאן: $\forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}:\ \left|f_k(x)\right| = \left|\frac{k^2 x}{1+k^7 x^2}\right| < \frac{1}{2k^{3/2}}$.

כעת ידוע כי הטור $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ מתכנס, ולכן עפ"י מבחן ה-M הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע.

כלומר הסס"ח $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל- $S(x)$, וכיוון שהטור הוא טור של פונקציות רציפות אז גם פונקצית הגבול $S(x)$ חייבת להיות רציפה בקטע.

הערה: גם כאן ההיפך לא נכון – כלומר יתכן שטור של פונקציות יתכנס לא במידה שווה בקטע מסוים – לפונקצית גבול שהיא כן רציפה באותו הקטע. למשל $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ היא פונקציה רציפה בקטע $(-1,1)$ אבל הטור אינו מתכנס במ"ש בקטע $(-1,1)$.

אינטגרציה וגזירה איבר איבר בטורי פונקציות.

משפט: יהא $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ המתכנס במ"ש בקטע לסכום $S(x)$. אזי:

1. הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx$ מתכנס.

2. מתקיים: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx$ (אפשר להחליף את סדר הסכום עם האינטגרל).

תרגיל: חשב את סכום הטור: $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}+\ldots$.

פתרון: נרשום: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\Big|_{x=\frac{1}{3}}$ ונתבונן בטור הפונקציות: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

נבטא את האיבר הכללי בטור באמצעות אינטגרל מסוים: $\int_0^x t^{k-1}dt = \frac{x^k}{k}$ שהיא פונקציה של x.

מכאן ש: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

הטור שקיבלנו באגף ימין הוא טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ עבור $c<1$.

ניתן להראות זאת ע"י משפט ה-M של ויירשטראס שכן: $\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in[-c,c]: \left|x^k\right|\le |c|^k$ והרי טור

המספרים החיובי $\sum_{k=1}^{\infty}|c|^k$ מתכנס. לכן עפ"י המשפט החלפת סדר האופרטורים אינטגרציה וסכום מותרת

ונקבל: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt = \int_0^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}\right)dt = \int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^{k}\right)dt = \int_0^x\frac{dt}{1-t} = -\ln|1-x|$ ומכאן ש: $S=\ln\frac{3}{2}$.

משפט: תהא $\{f_k(x)\}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$. אם הטור $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$

מתכנס (נקודתית) בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$,

אזי: $S'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)$ (נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות).

דוגמה: חשב את סכום הטור: $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$.

פתרון: נבדוק מהו סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$ עבור $|x|<1$ ונציב בסוף $x=\frac{1}{3}$. נשים לב כי: $\left(x^k\right)'=kx^{k-1}$.

כעת השאלה היא האם ניתן לכתוב (החלפת סדר סכום – נגזרות):

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'\overset{?}{=}x\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

נראה כי טור הנגזרות הרציפות $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$ מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ עבור $c<1$.

עובדה זו נובעת ממשפט ה-M של ווירשטראס שכן: $\left|kx^k\right|\le k|c|^k$: $\forall k\in\mathbb{N}$ וטור המספרים החיובי $\sum_{k=1}^{\infty}k|c|^k$ מתכנס (למשל עפ"י מבחן קושי $L=|c|<1$). מכאן שהמעבר הנ"ל הוא מוצדק ו: $S=\frac{3}{4}$.