תרגול 12 אינפי 3

20 בינואר 2015

מישור משיק:

משטח ב-$\mathbb{R}^3$ נתון ע"י משוואה $f(x,y,z)=0$ עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה שבסביבה U שלה f גזירה ברציפות.
משוואת המישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

זכרו שמשוואת מישור היא: $ax+by+cz+d=0$. נורמל למישור במקרה זה הוא וקטור המקדמים, קרי: (a,b,c).
במקרה של המישור המשיק, נקבל שהנורמל הוא $(f_x(p_0),f_y(p_0),f_z(p_0))$.
המישור המשיק הוא המרחב הנפרש ע"י וקטורי הנגזרות הכיווניות.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את כל הנקודות p_0 במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק למשטח זה בנקודה p_0 מקביל למישור: $x+y+z=1$.

<u>פתרון:</u>

תהי $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה במשטח. נגדיר פונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x$$

$$f_y=2y$$

$$f_z=-2z$$

ולכן בנקודה שלנו הנורמל למישור המשיק יהיה $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$.
כעת, מישורים מקבילים אם הנורמלים שלהם תלויים ליניארית.
הנורמל למישור $x+y+z=1$ הוא $(1,1,1)$. לכן, נחפש את כל הנקודות p_0 במשטח כך ש:

$$a \cdot (1,1,1) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

נקבל:

$$x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{a}{2}, z_0 = -\frac{a}{2}$$

כעת, הנקודה שלנו על המשטח, ולכן צריך להתקיים:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

ולכן $a = \pm 2$.
ולכן שתי הנקודות שתקיימנה את הדרוש הן:

$$(1,1,-1), (-1,-1,1)$$

<u>שאלה:</u>
יהי $k > 0$. הוכיחו שנפח הגוף החסום ע"י מישורי הקואורדינטות $(x,y,z \geq 0)$ והמישור המשיק למשטח:

$$xyz = k$$

אינו תלוי בנקודת ההשקה.
הגוף המתקבל הוא טטראדר (פירמידה משולשת).
נפח פירמידה הוא $\frac{S \cdot h}{3}$. h הוא גובה הפירמידה - מרחק הנקודה $(0,0,0)$ מהמישור המשיק שלנו (נסו לצייר והיווכחו שהוא אכן בסיס הפירמידה).

S הוא שטח הבסיס, שהוא משולש. כדאי לחשב את השטח בעזרת נוסחת הרון, שאינה דורשת זוויות.

ניקח נקודה כללית (x_0, y_0, z_0) ונחשב באמצעותה את S, h.

נחשב את המישור, נחשב את מרחק הנקודה ממנו, נבין מהם אורכי צלעות המשולש וכן הלאה; הכל באמצעות הנקודה שלנו.

הביטויים צריכים לבטל זה את זה, ונישאר עם ביטוי שכולל רק מספרים קבועים ואת k.

אינטגרציה:

כמה דברים לפני שנכנסים לעובי קורת האינטגרלים הכפולים.

יהיו R, R_1, R_2 תחומים חסומים וסגורים ב-$\mathbb{R}^2$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בתחומים אלו. אזי:

1. $\iint\limits_R (af + bg)ds = a\iint\limits_R f ds + b\iint\limits_R g ds$
2. אם $R_1 \cup R_2 = R$ וגם $R_1 \cap R_2 = \phi$, אז: $\iint\limits_R f ds = \iint\limits_{R_1} f ds + \iint\limits_{R_2} f ds$.
3. קיימת נקודה (x_0, y_0) עבורה: $\iint\limits_R f ds = S(R) \cdot f(x_0, y_0)$, כאשר $S(R)$ הוא שטח התחום R.
4. $m \cdot S(R) \le \iint\limits_R f ds \le M \cdot S(R)$, כאשר $M = \max\limits_R f, m = \min\limits_R f$.
5. $\left|\iint\limits_R f ds\right| \le \iint\limits_R |f|\, ds$.

איך מחשבים אינטגרל כפול?

1. אם $f(x, y)$ רציפה בתחום המלבני: $R = [a, b] \times [c, d]$, אזי:

$$\iint\limits_R f dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx\right) dy$$

2. אם $f(x, y)$ רציפה בתחום: $R = \{a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, אזי:

$$\iint\limits_R f dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy\right) dx = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx\right) dy$$

3. אם $f(x, y)$ רציפה בתחום $R = \{x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$, אזי:

$$\iint\limits_R f dxdy = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx\right) dy$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint\limits_R y^2x^2ds$$

במלבן $R = [-3,2]\times[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $f(x,y) = y^2x^2$. f רציפה ותחומנו מלבני. לכן:

$$\iint\limits_R y^2x^2ds = \int\limits_0^1\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{-2}^3 y^2x^2dx\right)dy$$

והאינטגרל הפנימי הוא אינטגרל במשתנה אחד. לכן:

$$= \int\limits_0^1\left(\left[\frac{y^2x^3}{3}\right]_{x=-3}^{x=2}\right)dy = \int\limits_0^1\left(\frac{8y^2}{3}+\frac{27y^2}{3}\right)dy = \left[\frac{8y^3}{9}+3y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{35}{9}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_R x^2ydxdy$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י $x=2, x=-2, y^2-x^2=1$.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$R = \{-2\le x\le 2, -\sqrt{1+x^2}\le y\le\sqrt{1+x^2}\}$$

והאינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_R x^2ydxdy = \int\limits_{-2}^2\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} x^2ydydx = \int\limits_{-2}^2\left(\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1+x^2}}^{y=\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \int\limits_{-2}^2\left(\frac{x^2(1+x^2)}{2}-\frac{x^2(1+x^2)}{2}\right)dx = \int\limits_{-2}^2 0dx = 0$$

*איך היינו מחשבים את השטח? כמו במקרה של משתנה אחד, מסתכלים על התחום $0\le y\le\sqrt{1+x^2}$ וכופלים את התוצאה ב־2.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $\iint\limits_D ydxdy$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין הישר $y = -x+5$ והמעגל $x^2+y^2=25$ ברביע הראשון.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$D = \{0 \leq x \leq 5, 5-x \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^5 \left(\int\limits_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} ydy \right) dx = \int\limits_0^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^5 \left(\frac{25-x^2}{2} - \frac{(5-x)^2}{2} \right) dx = \left[\frac{25x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(5-x)^3}{6} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$$

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:

$$\{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

כלומר:

$$\{0 \leq y \leq \sqrt{2}, y^2 \leq x \leq 2\}$$

ולכן:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_{y^2}^{2} f(x,y)dxdy$$

תרגיל:
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy$$

פתרון:
התחום שלנו הוא:

$$\{1 \leq x \leq e^y, 0 \leq y \leq 2\}$$

כלומר:

$$\{1 \leq x \leq e^2, \ln x \leq y \leq 2\}$$

ולכן:

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy = \int_1^{e^2} \int_{\ln x}^{2} f(x,y)dydx$$

תרגיל:
החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^4 \int_{3x^3}^{12x} f(x,y)dydx$$

פתרון:
התחום שלנו הוא:

$$\{0 \leq x \leq 4, 3x^2 \leq y \leq 12x\}$$

כלומר:

$$\{0 \leq y \leq 48, \frac{y}{12} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{3}}\}$$

ולכן:

$$\int_0^4 \int_{3x^3}^{12x} f(x,y)dydx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy$$

<u>תרגיל:</u>

החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dydx$$

<u>פתרון:</u>

נצייר את הגרפים של שתי הפונקציות: $y = \sqrt{2x-x^2}$, $y = \sqrt{2x}$.
שימו לב שהפונקציה $y = \sqrt{2x-x^2}$ היא המעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בנקודה $(1,0)$.
נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות היא $x = 0$.
כלומר, ה$-x$ שלנו לא כלוא בין שני $y-$ים. איך בכל זאת נחשב את האינטגרל?
מחלק את התחום שלנו לתחומים בהם x כן כלוא כמו שאנו צריכים.
התחום הראשון הוא $0 \le y \le 1$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{1-y^2}+1$.
התחום השני הוא $0 < y \le 1$ ובו $\sqrt{1-y^2}+1 \le x \le 2$.
התחום השלישי הוא $1 \le y \le 2$ ובו $\frac{y^2}{2} \le x \le 2$.
סכום שלושת האינטגרלים הללו ייתן לנו את האינטגרל המבוקש.