27/06/19

פתרון מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תשע"ט

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx$

ב. $\int x\sin^2(x)dx$

2.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k-n)^2+nk}$

נוסה ראשית להציג את הסדרה כסכום רימן

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{(k-n)^2+nk}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}-1\right)^2+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+x}dx$$

זה נכון כי למדנו שעבור f רציפה בקטע $[0,1]$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$$

כעת נחשב את האינטגרל

$$\frac{1}{(x-1)^2+x}=\frac{1}{x^2-x+1}$$

המכנה אי פריק ולכן מדובר בשבר חלקי

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

סה"כ

$$a_n\to\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \sin\left(x^2\right)dx$ (רמז: הציבו $t = x^2$)

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \left\{\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{matrix}\right\} = \int_1^\infty \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}dt$$

מתכנס לפי דיריכלה – הרי תנאי מתקיימים:

הקדומה של $\sin(t)$ היא $-\cos(t)$ שהיא פונקציה חסומה, כמובן שsin בעלת נגזרת רציפה.

הפונקציה $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ שואפת מונוטונית לאפס, גם היא בעלת נגזרת רציפה.

.3

א. קרבו את $\frac{1}{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נזכור כי בכל הממשיים

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נציב $x = -1$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

זה טור לייבניץ כיוון שגודל האיברים שואף מונוטנית לאפס, והסימנים מתחלפים.

לכן נסכום את האיברים הראשונים עד ולא כולל הראשון שקטן מהשגיאה.

$$\frac{1}{e} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

ב. חשבו את הסכום $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\dots$

נחבר

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{e}+e=2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)$$

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\frac{\frac{1}{e}+e}{2}$$

4. יהי טור פונקציות $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}$

א. הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל ¡.

לכל $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^3}\leq\frac{1}{n^3}$$

לכן לפי מבחן הM של ווירשטראס, הטור מתכנס במ"ש בכל הממשיים.

כיוון שמדובר בטור של פונקציות רציפות, גם פונקצית הגבול רציפה בכל התחום.

ב. הוכיחו כי f גזירה בכל ¡ ומתקיים $f'(0)=0$.

יש לנו טור פונקציות שמתכנס בנקודה, נגזרות הפונקציות רציפות, נראה שטור הנגזרות מתכנס במ"ש בכל הממשיים, ולכן מותר לגזור איבר איבר.

$$\frac{|-n\sin(nx)|}{n^3}\leq\frac{1}{n^2}$$

ולכן הטור אכן מתכנס לפי מבחן הM. לכן פונקציה הגבול גזירה בכל הממשיים, ומתקיים

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$$

נציב $x=0$ ונקבל שאכן $f'(0)=0$

5. תהי f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$ המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x+2\pi) = f(x)$.

א. נגדיר $h(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)dt$, הוכיחו כי $h'(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

נסמן את הקדומה של f בF (יש לה קדומה כי היא רציפה, פונקצית השטח היא קדומה).

$$h(x) = F(\pi + x) - F(-\pi + x)$$

ולכן

$$h'(x) = f(\pi + x) \cdot 1 - f(-\pi + x) \cdot 1 = f(\pi + x) - f(-\pi + x + 2\pi) = 0$$

ב. הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

בעצם צריך להוכיח ש

$$h(0) = h(a)$$

אבל הנגזרת של h היא אפס, ולכן הפונקציה קבועה, מש"ל.