מערך תרגול 12

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 (מסוף תרגול שעבר) נתון משטח בעל המטריקה $(u^1, u^2) = (x, y)$ בקואורדינטות

$$(g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור $y > 0$. מיצאו את עקמומיות גאוס.

פתרון 1 ראשית נמצא את סמלי גמא. גורם קונפורמי $\lambda(x,y) = y$, נגזרותיו $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. לכן

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{2y}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

כעת,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right) \\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right) \\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) \\
&= \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y^2} - 0 + 0 - \left(\frac{1}{2y}\right)\left(\frac{-1}{2y}\right) + \left(\frac{-1}{2y}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) - 0\right) \\
&= \frac{1}{2y^3}
\end{aligned}$$

תרגיל 2 לרשום מי הם האינדקסים החופשיים ואינדקסי הסכימה, ולפשט את הביטוי ככל הניתן:

$$\langle x_{ij}, n_k \rangle \delta^k{}_m g^{m\ell}$$

פתרון 2 סכימה m, k, חפשיים ℓ, i, j.

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, n_k \rangle \delta^k{}_m g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, n_k \rangle g^{k\ell} \\
&= \langle \Gamma^a_{ij} x_a + L_{ij} n, n_k \rangle g^{k\ell} \\
&= \left(\Gamma^a_{ij} \overbrace{\langle x_a, n_k \rangle}^{-L_{ak}} + L_{ij} \overbrace{\langle n, n_k \rangle}^{0} \right) g^{k\ell} \\
&= -\Gamma^a_{ij} L_{ak} g^{k\ell} \\
&= -\Gamma^a_{ij} \left(g^{\ell k} L_{ka} \right) \\
&= \Gamma^a_{ij} L^\ell{}_a
\end{aligned}$$

תרגיל 3 לרשום מי הם האינדקסים החופשיים ואינדקסי הסכימה, ולפשט את הביטוי ככל הניתן:

$$\langle n, n_{ab} \rangle \delta^a_c$$

פתרון 3 סכימה a, חפשיים b, c.

$$\begin{aligned}
\langle n, n_{ab} \rangle \delta^a_c &= \langle n, n_{cb} \rangle \\
&= \langle n, n_c \rangle_b - \langle n_b, n_c \rangle \\
&= \overbrace{\langle n, L^k{}_c x_k \rangle_b}^{0} - \langle L^m{}_b x_m, L^\ell{}_c x_\ell \rangle \\
&= -L^m{}_b L^\ell{}_c \langle x_m, x_\ell \rangle \\
&= -L^m{}_b L^\ell{}_c g_{m\ell} \\
&= L^m{}_b L_{mc}
\end{aligned}$$

1 עקמומיות מסומנת

תזכורת 1

א. עקמומיות מסומנת $\tilde{k_\alpha}$ של עקומה מישורית $\alpha(s)$ במהירות יחידה היא

$$\tilde{k_\alpha} = \frac{d\theta}{ds}$$

באשר $\theta(s)$ הזווית שיוצר המשיק $v(s) = \alpha'(s)$ עם הכיוון החיובי של ציר x, נגד כיוון השעון.

מתקיים $\left|\tilde{k_\alpha}\right| = k_\alpha$, כלומר עקמומיות מסומנת היא עידון של העקמומיות $k_\alpha = |\alpha''(s)|$ של עקומה מישורית.

ב. ביחס לפרמטר t כלשהו, עקמומיות מסומנת של $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ניתנת לחישוב ע"י

$$\tilde{k_\alpha} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}$$

בפרט מקבלים את הנוסחה לעקמומיות של עקומה מישורית פרמטר t כלשהו:

$$k_\alpha = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{|det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

תרגיל 4 מיצאו את העקמומיות של גרף הפונקציה $y = f(x)$.

פתרון 4

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$
$$\alpha'(t) = (1, f'(t))$$
$$\alpha''(t) = (0, f''(t))$$

כלומר

$$\tilde{k_\alpha}(x) = \frac{det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}\right|^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) & f''(x) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

כלומר

$$k_\alpha(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2 עקמומיות כוללת

תזכורת 2

א. עקומת ז'ורדן במישור היא עקומה מישורית סגורה שלא חותכת את עצמה, כלומר התמונה של העתקה $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ שהיא רציפה וחח"ע.

ב. עקומת ז'ורדן חלקה $C \subset \mathbb{R}^2$ נקראת קמורה ממש אם הפנים של של כל קטע המחבר שתי נקודות על C מוכל בפנים של C (כלומר בתחום החסום שמובטח ממשפט ז'ורדן).

באופן שקול: בכל נקודה p העקומה כולה, מלבד הנקודה p עצמה, נמצאת מצידו האחד של המשיק T_p.

ג. תהי C עקומה עם פרמטריזצית מהירות יחידה $\alpha(s) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. העקמומיות הכוללת של C היא

$$.Tot(C) = \int_a^b k_\alpha(s)ds$$

ד. העקמומיות הכוללת של כל עקומת ז'ורדן חלקה קמורה ממש היא 2π.

תרגיל 5 נתונה עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה

$$.3x^2 + 4xy - 6y^2 = -1$$

מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?

פתרון 5 העקומה היא חתך חרוט. נבין את צורתה:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

כלומר פולינום אופייני

$$(-3 - x)(-6 - x) - 4 = 0$$

כלומר $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -7$. לכן אחרי לכסון העקומה מוגדרת ע"י $-2x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ כלומר זו אליפסה. בפרט, זו עקומת ז'ורדן קמורה, לכן העקמומיות הכוללת שלה היא 2π.

תזכורת 3

א. עקמומיות מסומנת כוללת

$$\tilde{Tot}(C) = \int_a^b \tilde{k_\alpha}(s)ds$$

ב. עקמומיות מסומנת כוללת של עקומת ז'ורדן חלקה כלשהי (לאו דווקא קמורה) היא $\pm 2\pi$.

תרגיל 6 **(**$Leminscate\ of\ Gerono$**)** נתונה העקומה

$$.\alpha(t) = (\sin t, \frac{1}{2}\sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

א. ציירו סקיצה של העקומה.

ב. על סמך צורת העקומה, מהי העקמומיות המסומנת הכוללת?

פתרון 6

א. ציור.

ב. יש סיבוב אחד עם כיוון השעון וסיבוב אחד נגד כיוון השעון, כלומר עקמומיות מסומנת כוללת 0.