תרגול 8

15 בדצמבר 2015

<u>הגדרה</u>: הרכבת פונקציות:

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות. נגדיר את ההרכבה ביניהן להיות:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$g \circ f : A \to C$ היא פונקציה. (הסבר בדף שאביה העלה לאתר)

<u>הערה</u>: הרכבת פונקציות היא מקרה פרטי של הרכבת יחסים כמו שראינו בתרגול 7

<u>לדוגמה</u>:

אם נתבונן ב$-f, g$ מהדוגמה הקודמת שלנו נקבל:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(6x - 2) = (6x - 2)^4 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4 - 1) = 6(x^4 - 1) - 2$$

שימו לב שהרכבה אינה קומוטטיבית, אינה חילופית - הסדר בה נרכיב פונקציות זו על זו משנה את התוצאה הסופית.

<u>תרגיל</u>:

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ חח"ע. האם f חח"ע? ומה לגבי g?

<u>פתרון:</u>

ההרכבה שלנו חח"ע, לכן אם $a_1 \neq a_2$ אז $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$.

כעת, אם $a_1 \neq a_2$ אז $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. אלא ש$-g$ היא פונקציה ולכן חד ערכית, ולכן אם התמונות שונות המקורות שונים, כלומר:

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \to f(a_1) \neq f(a_2)$$

וסה"כ $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$ ולכן הפונקציה f חח"ע.

g לא בהכרח חח"ע. נתבונן למשל בקבוצות:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$$

ונגדיר פונקציות:

$$f : A \to B, f(1) = 1$$

$$g : B \to C, g(1) = g(2) = 3$$

כעת, ההרכבה היא $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 3$ אכן חח"ע (יש רק מקור אחד אז זה טריוויאלי) אך gלא חח"ע, כי $g(1) = g(2)$ אך $1 \neq 2$.

<u>תרגיל:</u>

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ על. האם g על? ומה לגבי f?

<u>פיתרון:</u>

נראה ש־g על: יהי $c \in C$, $g \circ f$ על ולכן קיים $a \in A$ כך ש ־ $g(f(a)) = g \circ f(a) = c$, והמקור של c תחת g הוא $f(a)$.

f לא בהכרח על, למשל: נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$ ונגדיר שתי פונקציות $f : A \to B, g : B \to C$ ע"י: $f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. ב־$C$ יש רק איבר אחד שמקורו 1, אבל f לא על.

הגדרה:

תהי A קבוצה. **יחס הזהות** הוא יחס:

$$Id_A = \{(a,a) | a \in A\}$$

יחס הזהות הוא פונקציה.

פונקציה זו שולחת כל איבר ב־A לעצמו, כלומר:

$$Id_A : A \to A, Id_A(a) = a$$

הגדרה:

נאמר שפונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה, אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך שמתקיים:

$$f \circ g = Id_B$$

$$g \circ f = Id_A$$

נסמן: $g = f^{-1}$ ונאמר ש־g היא ההופכית של f (וכן $f = g^{-1}$ ו־f היא ההופכית של g).

__**משפט**__: פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל. שימו לב שכיוון אחד נובע משני התרגילים הקודמים שעשינו, כיוון שני ־ פשוט צריך לבנות את הפונקציה ההופכית.

__דוגמה:__

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = 6x - 2$. בתרגול הקודם ראינו שהיא חח"ע ועל.

ההופכית שלה היא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$g(x) = \frac{x+2}{6}$$

הערה: פונקציה היא הפיכה רק אם אפשר להפוך אותה "משני הצדדים", כמו שהגדרנו למעלה.

אם למשל נתבונן בפונקציות $f,g:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ המוגדרות ע"י:

$$f(n)=n+1$$

$$g(n)=\begin{cases} n-1 & n\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

נקבל שמתקיים: $g\circ f(n)=Id$ אך אם נרכיב הפוך כלל לא נקבל פונקציה על (ל-0 לא יהיה מקור).