תרגיל 11 – אלגברה מופשטת 1

1. תהי G חבורה סופית ו P,N תת חבורות שלה. הוכיחו את הטענות הבאות.

1.1. אם P,N הן חבורות-p כך ש $PN=NP$ (ובפרט PN היא תת חבורה של G), אז PN היא חבורת-p.

1.2. נניח כי $PN=NP$, P היא תת חבורה p-סילו של G ו N היא חבורת-p. אזי $N\le P$.

1.3. אם P היא תת חבורה p-סילו של G ו N היא חבורת-p המוכלת במנרמל $N_G(P)$ אז $N\le P$.

2. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G. הוכיחו ש-$[G:H]=\infty$.

רמז: העידון של משפט קיילי.

3. הוכיחו: אם G חבורה פשוטה מסדר גדול משתיים וקיימת לה תת חבורה H מאינדקס n, אזי אפשר לשכן את G ב- A_n.

4. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

5. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

5.1. אוטומורפיזם נקבע על-ידי התמונות של קבוצת יוצרים.

5.2. אוטומורפיזם מעביר מחלקת צמידות למחלקת צמידות (רמז: הראו שאם x,y צמודים, אזי גם התמונות שלהם תחת אוטומורפיזם צמודות).

5.3. אוטומורפיזם שומר על התחלפות ועל אי-התחלפות (רמז: הוא הפיך).

6. תהי G חבורה סופית לא אבלית ונניח $|G|>2$. הוכיחו כי $|Aut(G)|\ge 2$.

רמז: התבוננו באוטומורפיזמים פנימיים.

7. הוכיחו: לכל שתי חבורות G,H יש שיכון $Aut(G)\times Aut(H)\hookrightarrow Aut(G\times H)$.

8. תהי G חבורה סופית, ו- $\varphi\in Aut(G)$ אוטומורפיזם שנקודת השבת היחידה שלו היא איבר היחידה. הוכיחו: לכל $g\in G$ קיים $x\in G$ כך ש- $g=x^{-1}\varphi(x)$.

רמז: הגדירו פונקציה $f:G\to G$ על ידי $x\mapsto x^{-1}\varphi(x)$.

בהצלחה! ☺