לינארית 2 ־ בוחן

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים: שם מלא, ת.ז ושם מתרגל.
ענו על השאלות הבאות:

1. נתונה ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

(שימו לב שתנאים אלו מגדירים את העתקה באופן יחיד).

(א) [30 נקודות] מצאו את הפולינום האופיני, הפולינום המינימאלי, הערכים העצמיים והמרחביים העצמיים של T.

פתרון:

נגדיר $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב ונסמן $S=\{e_1,e_2,e_3\}$ את הבסיס הסטדנטרדי. אזי $[T]_S^B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. נחשב את $[I]_B^S=\left([I]_S^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$ ע"י דירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&&\\0&1&-1&&1&\\0&0&1&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-2&\\0&1&-1&&1&\\0&0&1&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&-1\\0&1&0&&1&1\\0&0&1&&&1\end{array}\right)$$

ולכן

$$[T]_S^S=[T]_S^B[I]_B^S=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&5&4\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ולכן הפ"א של T הוא

$$p_T(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda+2&-5&-4\\1&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda+2&-5\\1&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left[(\lambda+2)(\lambda-2)+5\right]=(\lambda-2)\left[\lambda^2+1\right]$$

לכן יש ע"ע יחיד 2. המ"ע

$$V_2 = N([T]_S^S - 2I) = N\left(\begin{pmatrix} -4 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בנוסף, כיוון שלפ"א ולפ"מ יש אותם גורמים אי פריקים ־ במקרה שלנו הם שווים. כלומר $m_T = p_T$

(ב) [16 נקודות] קבעו האם T לכסינה. קבעו האם T הפיכה.

פתרון:

כיוון שיש רק ו"ע יחיד T אינה לכסינה. כיוון שאין ע"ע 0 T כן הפיכה.

(ג) [14 נקודות] מצאו את הפירוק הפרמרי של $\mathbb{R}^3$ ביחס ל T.

פתרון:

מצאנו כי $m_T(\lambda) = (\lambda - 2)\left[\lambda^2 + 1\right]$ ולכן

$$\mathbb{R}^3 = \ker(T - 2I) \oplus \ker\left(T^2 + I\right)$$

.2

(א) [20 נקודות] הוכיחו או הפריכו: תהא $T : V \to V$ ה"ל. יהיו $\{v_1, \ldots, v_r\}$ קבוצת ו"ע של T.
אזי $W = span\{v_1, \ldots, v_r\}$ הוא מרחב T־ אינוואריאנטי.

פתרון:

נסמן λ_i את הע"ע המתאים ל v_i. כלומר $Tv_i = \lambda_i v_i$. יהא $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \in W$ ונראה כי $Tv \in W$. אכן

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i T v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i v_i \in W$$

כנדרש.

(ב) [20 נקודות] הוכיחו או הפריכו: תהא $T : V \to V$ ה"ל. יהא $W \neq 0$ תת מרחב T־ אינוואריאנטי.
אזי קיימת קבוצה ו"ע $\{v_1, \ldots, v_r\}$ כך ש $W = span\{v_1, \ldots, v_r\}$.

פתרון:

V הוא תמיד ת"מ T־ אינוואריאנטי. אם קיימת קבוצת ו"ע שפורשת את V זה אומר ש T לכסינה ולכן אם עבור T לא לכסינה יתקיים כי V הוא תת מרחב T־ אינוואריאנטי שאין לו קבוצת פורשת של ו"ע. למשל

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

המוגדרת $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ אינה לכסינה כי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שהינה בלוק זורדן $J_2(1)$ שאינו לכסין.

בהצלחה! ☺