1. נסחו את המשפט ה**פולרי** למשפט פסקל.

פתרון: משפט פסקל אומר שאם W חתך חרוט ו-A,B,C,D,E,F נקודות עליו אז $AE\cap BD$, $AF\cap CD$, $BF\cap CE$ נמצאות על ישר אחד. נסמנו m.

הישר הפולרי לנקודה על חתך חרוט הוא הישר המשיק לחתך החרוט באותה הנקודה. כלומר במקום A,B,C,D,E,F נקודות על W יש לנו a,b,c,d,e,f משיקים ל-W.

כעת, $A,E\in AE$ לכן לפי משפט ההדדיות הנקודה הפולרית ל-AE נמצאת על a וגם על e, כלומר הנקודה הפולרית ל-AE היא $a\cap e$ ובאותו אופן עבור BD,BF,CE,AF,CD.

כעת, $AE\cap BD\in AE,BD$ לכן לפי משפט ההדדיות $a\cap e, b\cap d$ נמצאים על הישר הפולרי לנקודה $AE\cap BD$, כלומר הישר הפולרי לנקודה זו הוא הישר דרך $a\cap e$ ו-$b\cap d$. באותו האופן מקבלים את הישר הפולרי עבור $BF\cap CE$, $AF\cap CD$.

לסיום, $AE\cap BD$, $AF\cap CD$, $BF\cap CE$ נמצאות על m לכן לפי משפט ההדדיות הנקודה הפולרית ל-m נמצאת על הישר דרך $a\cap e$ ו-$b\cap d$ וכן על הישר דרך $a\cap f$ ו-$c\cap d$ וכן על הישר דרך $b\cap f$ ו-$c\cap e$, כלומר שלושת הישרים האלה נפגשים בנקודה אחת.

כעת אם נסדר את המשיקים על החתך חרוט לסירוגין כך: a,e,c,d,b,f, אז המשפט אומר שאם יש משושה שחוסם חתך חרוט, אז שלושת הזוגות של האלכסונים הראשיים שלו נפגשים בנקודה אחת.

2. (20) נתון מעגל יחידה γ עם מרכז O ונקודה A פנימית למעגל. מצא את המרכז והרדיוס של מעגל δ מאונך למעגל γ כך שהפיכה ב δ תשלח את נקודה O לנקודה A.

פתרון: ראינו בתרגול חזרה.

3. יהי S מעגל במישור. משולש במישור נקרא פולרי לעצמו כאשר כל קודקוד הוא פולרי (ביחס ל-S) לצלע ממול. יהי ABC משולש פולרי לעצמו. הוכיחו שאחד מן הקודקודים של ABC בהכרח נמצא בתוך המעגל ושניים מחוצה לו.

<u>פתרון:</u> ראינו בתרגול. אם יש קודקוד אחד בפנים אז הצלע שמולו היא הישר הפולרי והיא בחוץ, כלומר שני הקודקודים האחרים בחוץ. לכן רק נשאר להסביר למה לא יתכן ששלושת הקודקודים בחוץ. אך זה לא יתכן כי ראינו שמרכז המעגל S היא נקודת מפגשים התיכונים של המשולש.

4. יהי C מעגל שמרכזו M ו-P נקודה שאינה על C השונה מ-M . תהיינה Y,X נקודות על C כך ש-

1. זוית PMX שווה זוית PMY
2. הישר PX חותך את המעגל C בנקודה נוספת: X'
3. הישר PY חותך את המעגל בנקודה נוספת: Y'.

נגדיר $Q = XY' \cap X'Y, R = XY \cap X'Y'$.

הוכיחו: א. $QR \perp PM$. ב. אם Q בתוך המעגל אז R,P מחוץ לו (הסתמכו על תכונות ידועות של הישר הפולרי).

<u>פתרון:</u>

4. א) שוב, הרעיון הוא להשתמש בתכונה של ישר פולרי 1 ביחס לנקודה ומעגל: הישר המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה מאונך לישר 1 (הישר RQ הוא הישר הפולרי לנקודה P).

ב) נשים לב שאם P בתוך המעגל, אז הישר הפולרי נמצא מחוץ לו ולכן אינו חותך אותו – ז"א Q תהיה מחוץ למעגל – וזו סתירה לנתון.

נניח ש-R היא נקודה בתוך המעגל – ז"א החיתוך של XY ו- X'Y' הוא בתוך המעגל. אבל אז Q הייתה מחוץ למעגל – זו סתירה. ניתן לראות זאת אם שמים לב שאת הישר הפולרי (לנקודה P שהיא מחוץ

למעגל) ניתן לבנות גם על ידי העברת שני משיקים למעגל (נניח לנקודות M,M'). כאשר מזיזים את המשיקים פנימה (לכיוון מרכז המעגל) ניתן להוכיח (על ידי לקיחת מודל אמיתי, עם משוואות וכו') שהנקודה Q (או R) תהיה בתוך המעגל והנקודה השנייה R (או Q) תהיה מחוץ לו.

הגדרה: יהי p ישר ו-C חתך חרוט. הנקודה P אשר הישר p הוא הפולרי לה נקראת קוטב של p.

5. כזכור, הישר הפולרי לנקודה P (מחוץ ל-C) הוגדר בעזרת העבר שני ישרים דרך P החותכים את המעגל בנקודות: X,X',Y,Y' . בנו את הבניה הדואלית לכך כאשר המקביל הדואלי לנקודה על המעגל הוא משיק בנקודה זו, ז"א: יהי p ישר (החותך את המעגל בשתי נקודות). בנו את הקוטב ל-p ע"י בחירת שתי נקודות על p ו-4 משיקים מהן למעגל.

<u>פתרון:</u>

5. נבחר שתי נקודות על p (שתיהן מחוץ ל-C) ונעביר מהן את ארבעת המשיקים: x,x' ו- y,y' ל-C.
נגדיר את הישרים:
$q = \overline{(x'\cap y')(x\cap y)}, r = \overline{(x'\cap y)(y'\cap x)}$ והקוטב יהיה P = q∩r.