תכונות בסיסיות של האינטגרל המסוים

למה

אם f אינטגבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל תת קטע $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, f אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$.

הוכחה

עפ״י משפט לבג (חלק שני).

יהי $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$.

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, לכן עפ״י משפט לבג (חלק שני) חסומה בקטע $[a,b]$, ורציפה כמעט בכל הקטע $[a,b]$.

בפרט, f חסומה בתת הקטע $[\alpha,\beta]$.

קבוצת נקודות אי הרציפות של f בקטע $[\alpha,\beta]$ מוכלת בקבוצת נקודות אי הרציפות של f בקטע $[\alpha,\beta]$, והקבוצה האחרונה אפסית. לכן, גם הקבוצה הראשונה אפסית.

עפ״י משפט לבג (חלק שני), f אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$.

■

למה

יהיו $a<c<b$, f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

הוכחה

תהי P_n סדרת חלוקות מנוקדות כך ש: $\lambda(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

אזי, לכל $n\in\mathbb{N}$: $P_n\cup\{c\}=\overbrace{\big((P_n\cup\{c\})\cap[a,c]\big)}^{Q_n}\cup\overbrace{\big((P_n\cup\{c\})\cap[c,b]\big)}^{R_n}$.

אז:

$$\lambda(Q_n),\lambda(R_n)\le\lambda(P_n\cup\{c\})\le\lambda(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

לכן:

$$\lambda(Q_n)\,,\lambda(R_n)\,,\lambda(P_n\cup\{c\})\xrightarrow{n\to\infty}0$$

לכן, משום ש $f-$ אינטגרבילית בכל תת הקטעים הסגורים של $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \sigma(P_n\cup\{c\})=\sigma(Q_n)+\sigma(R_n)\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

לכן, עפ"י אריתמטיקה של גבולות ויחדות הגבול, נקבל:

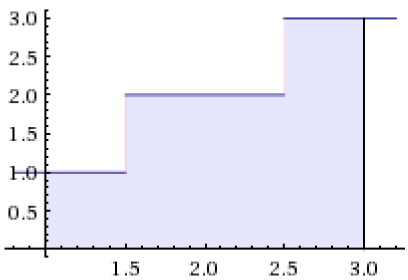
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

■

דוגמה

$$\int_1^3 [x]dx=?$$

המחשה



הוכחה

$[x]$ אינטגרבילית בכל קטע סגור עפ"י משפט לבג (חלק שני)

שכן היא חסומה ורציפה פרט לקבוצה סופית.

לכן (עפ"י הלמה):

$$\int_1^3 [x]dx=\int_1^2 [x]dx+\int_2^3 [x]dx$$

עפ"י למה, פונקציות אינטגרביליות השונות במספר סופי (או אפסי) של נקודות, יש להן אותו אינטגרל:

$$\int_1^3 [x]dx = \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx$$

$$\int_1^3 [x]dx = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

■

הערה

אם לפונקציה f יש מספר סופי של נקודות אי רציפות בקטע $[a,b]$ וכולן מסוג ראשון (קפיצה), אז f אינטרבילית בקטע $[a,b]$, וניתן לחשב את האינטגרל שלה ע"י סכום של אינטגרלים פשוטים (כמו בדוגמה הנ"ל).

נניח שאי הרציפויות הן בנקודות: $a \le c_1 < \cdots < c_k \le b$.

נראה את המקרה ש: $a < c_1 < \cdots < c_k < b$.

אז, לכל $1 \le i \le k$, הגבול מימין ומשמאל של $f(x)$ קיימים (ושונים), לכן אם נגדיר בכל קטע $[c_{i-1}, c_i]$ (ובאופן דומה ב - $[c_k, b]$, $[a, c_1]$):

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (c_{i-1}, c_i) \\ \lim\limits_{x \to c_{i-1}^+} f(x) & , \quad x = c_{i-1} \\ \lim\limits_{x \to c_i^-} f(x) & , \quad x = c_i \end{cases}$$

לכן:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)dx$$

בכל קטע (c_{i-1}, c_i), $\tilde{f}(x) = f(x)$ פרט לאולי שתי נקודות, לכן:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} \tilde{f}(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b \tilde{f}(x)dx$$

$\tilde{f}$ רציפה בכל הקטעים הסגורים הנ"ל, לכן אינטגרבילית שם, לכן גם f אינטגרבילית שם והאינטגרלים זהים.

(נשים לב שמהנתון, f חסומה ורציפה פרט למספר סופי של נקודות, לכן אינטגרבילית).

$$\blacksquare$$

סימונים

$$\int_a^a f(x)dx := 0$$

עבור $a < b$ ופונקציה אינטגרבילית f בקטע $[a, b]$:

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

למה

לכל a, b, c (לאו דווקא מסודרים $a < b < c$), ולכל פונקציה f אינטגרבילית בכל הקטעים הרלוונטים:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

הוכחה

בודקים את כל האפשרויות עבור a, b, c.

למשל: $c < a < b$.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \overset{\text{צ"ל}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

ז"א, צ"ל:

$$\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

$c < a < b$, לכן זה נכון עפ"י למה.

למשל: $a=c<b$.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = 0 + \int_a^b f(x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\blacksquare$$

למה

אם $f \le g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

הוכחה

לכל חלוקה מנוקדת P של $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \xleftarrow{0\leftarrow\lambda(P)} \sigma_f(P) \le \sigma_g(P) \xrightarrow{\lambda(P)\rightarrow 0} \int_a^b g(x)dx$$

לכן:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$\blacksquare$$

מסקנה

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אזי: הפונקציה $|f(x)|$ אינטגרבילית שם, ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

הוכחה

f אינטגרבילית, לכן חסומה בקטע. לכן, גם $|f(x)|$ חסומה בקטע.

נימוק: אם $|f(x)| < c$ בקטע, אז: $\big||f(x)|\big| = |f(x)| < c$ שם.

$|f(x)|$ רציפה בכל נקודות הרציפות של $f(x)$.

נימוק: הפונקציה $|x|$ רציפה בכל $\mathbb{R}$, והרכבת רציפות רציפה.

לכל x:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$\Downarrow$$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\blacksquare$$

הערה

מסקנה זו מכלילה את אי שוויון המשולש.

יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה:

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \alpha\,, & x \in [0,1) \\ \beta\,, & x \in [1,2) \end{cases}$$

נחשב:

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx\right| = |\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1| = |\alpha + \beta|$$

$$\int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_1^2 |f(x)|dx = \int_0^1 |\alpha|dx + \int_1^2 |\beta|dx = |\alpha| + |\beta|$$

עפ"י המסקנה:

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

באופן אינטואיטיבי, המסקנה היא גרסה אינסופית של אי שוויון המשולש.

■

דוגמה

ייתכן כי $|f(x)|$ אינטגריבלית ב - $[0,1]$, אך $|f(x)|$ אינה אינטרגבילית שם.

ניקח וריאציה של פונקציית דיריכלה:

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ -1\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(x)$ אינה רציפה באף נקודה, לכן עפ"י משפט לבג (חלק ראשון) אינה אינטגרבילית.

$f(x) \equiv 1$, ובפרט אינטגרבילית (בכל קטע).

■

משפט הערך הממוצע האינטגרלי

יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, g, אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו – $0 \le g(x)$ בקטע.

אזי, קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

הוכחה

יהיו:

$$\beta \coloneqq \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

$$\alpha \coloneqq \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

f רציפה, לכן α, β קיימים.

לכן, לכל $x \in [a,b]$:

$$\alpha \cdot g(x) \le f(x) \cdot g(x) \le \beta \cdot g(x)$$

נפעיל אינטגרל על שני האגפים:

$$\alpha \cdot \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx \le \beta \cdot \int_a^b g(x)dx$$

אם:

$$\int_a^b \overbrace{g(x)}^{\le 0} dx = 0$$

אז $g(x) = 0$ כמעט בכל הקטע, לכן: $f(x) \cdot g(x) = 0$ כמעט בכל הקטע, לכן:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = 0$$

וטענת המשפט נובעת.

אם:

$$\int_a^b g(x)dx \ne 0$$

נחלק בנ"ל:

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \alpha \le \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le \beta = \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

f רציפה, לכן עפ"י משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

לכן:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

■

הערה

הוכחה דומה מראה שמהשפט נכון גם כאשר $g(x)\leq 0$ בכל הקטע.

■