שאלה 2

יהי $n > 1$ מספר טבעי. נניח שהפונקציה f מוגדרת וגזירה n פעמים בסביבת הנקודה 0, ומתקיים $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ אך $f^{(n)}(0) = 5$. חשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\sin 2x)^n}.$$

בפתרונך, מותר להשתמש בגבול הידוע $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

תשובה:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(2x)^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(2x)^n} \cdot \frac{\sin(2x)^n}{2^n x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2^n x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^n} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{5}{2^n n!}$$

לופיטל n x פעמים.

שאלה 3

נגדיר, לכל נקודה x בקטע $[-1,1]$,

$$f(x) := \int_{-1}^{x} |t|\ dt.$$

א. בטא את הפונקציה $f(x)$ בצורה מפורשת (בלי סימן האינטגרל).

ב. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f רציפה.

ג. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f גזירה.

תשובה:

א)

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{0} -t\ dt + \int_{0}^{x} t\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} -t\ dt = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ב) f רציפה בכל $[-1,1]$ לפי המשפט היסודי, מכיוון שהאינטגרנד $|t|$ רציף. (כך גם נראה מסעיף א')

ג) לפי המשפט היסודי - בכל נק' בה האינטגרנד רציף f גזירה, לכן f גזירה בכל הקטע (ושם $f'(x) = |x|$)

שאלה 4

לכל אחד מהאינטגרלים הבאים, בדוק האם הוא מתכנס, והאם הוא מתכנס בהחלט.

א. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx$.

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^5}}\, dx$.

תשובה:

ב

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$g(x) = \sin x$

$f(x) = \frac{1}{x}$ מונוטונית יורדת לאפס, והיא יורדת ל0.

$G(x) = \int_1^x \sin t\, dt = \cos 1 - \cos x$ חסומה.

לפי דיריכלה: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס. ובאותו אופן גם $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס.

בנוסף $\frac{\sin x}{x}$ חסומה ורציפה בלי דקטע $[-1,1]$ לכן $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס. לסיכום: I מתכנס.

א

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2}\, du$$

- מתכנס כי החזקה >1. ו- $\ln\frac{1}{2} < 0$.

החלפת משתנה

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

ג

נעזר במבחן ההשוואה הגבולי

$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$g(x) = \frac{1}{x}$

לכן g, f חברים.

כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ לא מתכנס כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ לא מתכנס.

שאלה 5

לכל מספר טבעי n, נגדיר פונקציה $f_n(x) := n^2xe^{-n^2x^2}$ שתחומה הוא הקרן $[0,\infty)$.

א. מצא את התחום A שבו סידרת הפונקציות מתכנסת, ואת הפונקציה f אליה הסידרה מתכנסת בתחום זה.

ב. האם ההתכנסות בתחום A היא במידה שווה?

ג. האם לכל נקודה x בתחום A מתקיים $\int_0^x f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f(t)\,dt$?

תשובה:

א)

$$\forall x\in[0,\infty) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

כמו עבור $x=0$ (סדרה קבועה).

$x\neq 0$

$$f_n(x) = e^{\ln(n^2 x e^{-n^2x^2})} = e^{\ln x + 2\ln n - n^2x^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n}{2nx^2} = 0$$

וכן $n^2x^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

לכן $\lim_{n\to\infty} 2\ln n - n^2x^2 = -\infty$ $(*)$

ב) לא. לפי מבחן ה-limsup

$$\sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) = n^2\frac{1}{\sqrt{2}n}e^{-n^2\frac{1}{2n^2}} = \frac{n}{\sqrt{2e}} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad (\infty)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

ג) לא

עבור $t\neq 0$

$$\int_0^t n^2xe^{-n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{n^2t^2} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left(1-e^{-n^2t^2}\right) \underset{\substack{n\to\infty\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^t f(x)\,dx$$