פתרון תרגיל 8 אינפי 3 תשע"ו

4 בינואר 2016

1. נחשב את הנגזרות עד סדר 2:

$$f_x = \cos\left(xe^y\right)e^y, f_y = \cos\left(xe^y\right)xe^y$$

$$f_{xx} = -\sin\left(xe^y\right)e^{2y}, f_{yy} = xe^y\cos\left(xe^y\right) - \sin\left(xe^y\right)x^2e^{2y}$$

$$f_{xy} = -\sin\left(xe^y\right)xe^{2y} + \cos\left(xe^y\right)e^y$$

שימו לב שמדובר על מכפלת פונקציות. נציב את הנקודה שלנו ונקבל:

$$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi}{2}, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

ולכן הפיתוח הוא:

$$f\left(x,y\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y - \frac{\pi^2}{4}y^2\right) + o\left(\left\|(x,y)\right\|^2\right)$$

2. נשתמש בכל מקרה בטכניקה שונה.

(א)

$$f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y \ln x$$

$$f_{xx} = y\left(y-1\right)x^{y-2}, f_{yy} = x^y \ln^2 x, f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

נציב את הנקודה שלנו ונקבל:

$$f\left(1,1\right) = 1$$

$$f_x\left(1,1\right) = 1, f_y\left(1,1\right) = 0$$

$$f_{xx}\left(1,1\right) = f_{yy}\left(1,1\right) = 0, f_{xy} = 1$$

ולכן הפיתוח הוא:

$$f\left(x,y\right) = 1 + \left(x-1\right) + \left(x-1\right)\left(y-1\right)$$

(ב) נכתוב את הפונקציה בצורה הבאה:

$$f\left(x,y\right) = \frac{x-1+1}{y-1+1} = \left(x-1\right)\cdot\frac{1}{1+\left(y-1\right)} + \frac{1}{1+\left(y-1\right)}$$

נשתמש בטור הנדסי אינסופי שכולנו ראינו בגיל ינקות:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

עבור $|q| < 1$. במקרה שלנו, $|y-1| < 1$ ולכן:

$$\frac{1}{1+\left(y-1\right)} = \frac{1}{1-\left(-\left(y-1\right)\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(y-1\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(y-1\right)^n$$

ולכן:

$$f(x,y) = (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y-1)^n$$

כלומר:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y-1)^n \cdot ((x-1)+1)$$

נציב n מתאים כדי לקבל את הסדר הנדרש.

שימו לב שגם כאן אפשר פשוט לחשב את הנגזרות החלקיות ולהציב בנוסחה.

3. הפונקציה שלנו היא בעצם טור הנדסי אינסופי:

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2y} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2y\right)^n$$

כי בסביבת הנקודה $(0,0)$, $\left|x^2y\right| < 1$.

לכן, עד סדר 8:

$$f(x,y) \approx 1 + x^2y + x^4y^2$$

האיבר הבא כבר ממעלה 12. מיחידות פיתוח טיילור נקבל:

$$1 \cdot x^4y^2 = \frac{1}{6!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}(0,0) \cdot x^4y^2$$

ולכן:

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}(0,0) = 4! \cdot 2! = 48$$

4. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = (2(x-1), -4y)$$

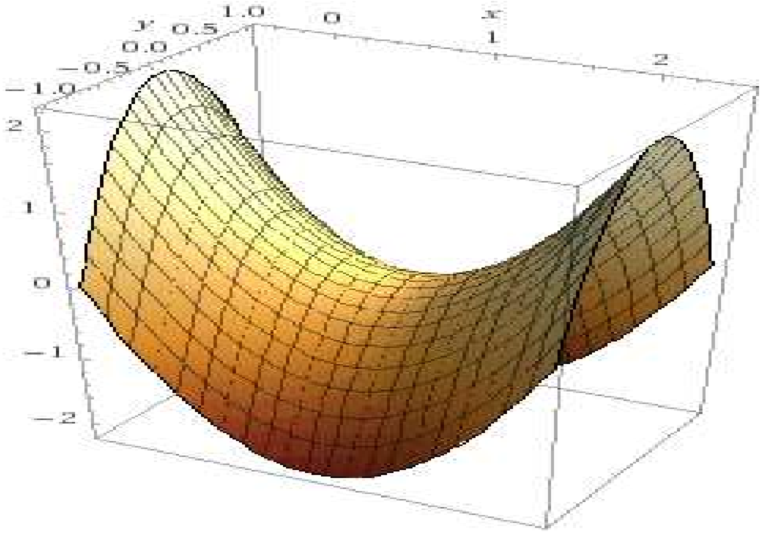
והוא מתאפס רק בנקודה $(1,0)$.

מטריצת הסה היא:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה מעורבת (ע"ע אחד חיובי והשני שלילי) ולכן הנקודה היא נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



(א) הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = \left(4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x\right)$$

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases}$$

נסכום את המשוואות ונקבל: $x^3 + y^3 = 0$, כלומר $x = -y$.

נציב זאת באחת מהמשוואות:

$$x^3 - 2x = 0$$

ולכן $x = 0$ או $x = \pm\sqrt{2}$, ולכן הנקודות הקריטיות הן:

$$(0,0)\,,\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

מטריצת הסה היא:

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0,0)$:

$$H_{(0,0)}=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע את סוג הנקודה בעזרת מטריצת הסה.

נבדוק את סוג הנקודה בדרכים אחרות.

נשים לב שמתקיים:

$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

אם נתקדם אל הנקודה לאורך $x=y$ נקבל:

$$f(x,x)=x^4+x^4\geq 0$$

ואם נתקדם לאורך $y=0$ נקבל:

$$f(x,0)=x^4-2x^2$$

נחקור פונקציה זו כפונקציה של משתנה אחד:

$$f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$$

ולכן $x=0$ נקודה קריטית. נגזור שנית:

$$f''(x)=12x^2-4$$

ולכן $f''(0)=-4<0$ ולכן $x=0$ נקודת מקסימום לאורך הישר $y=0$ (אפשר גם לבדוק תחומי עלייה וירידה).

בנקודה $(0,0)$ עצמה מתקיים: $f(0,0)=0$.

מההתקדמות לאורך $x=y$ נקבל שהנקודה אינה נקודת מקסימום, ומההתקדמות לאורך $y=0$ נקבל שהנקודה אינה נקודת מינימום.

לכן, זו נקודת אוכף.

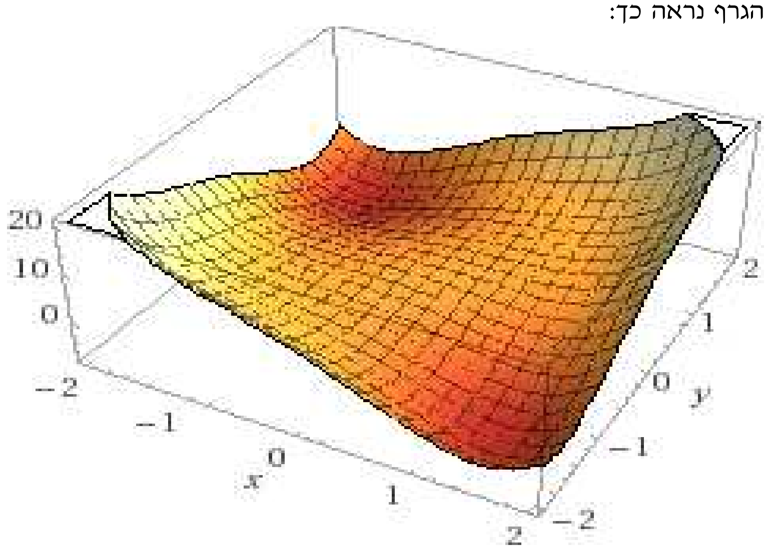
בנקודות $(\sqrt{2},\sqrt{2}-)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$:

$$H_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = H_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

המינור הראשון מקיים: $M_1 = 20 > 0$.

המינור השני מקיים: $M_2 = 400 - 16 > 0$, ולכן לפי סילבסטר, אלו נקודות מינימום.

הגרף נראה כך:



(ב) האמת היא שזה די ארוך, לא חשבתי על זה לפני ששמתי את זה כתרגיל.

הגדריאנט הוא $\nabla f = (f_x, f_y)$:

$$f_x = y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + xy\cdot\frac{-2\cdot\frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y-\frac{2x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$f_y = \frac{x-\frac{x^3}{a^2}-\frac{2y^2x}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

אנו בודקים מתי הגדריאנט מתאפס, כלומר מתי המונים שווים ל־0:

$$y-\frac{2x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2} = 0, x-\frac{x^3}{a^2}-\frac{2y^2x}{b^2} = 0$$

נחלק למקרים. אם $x,y\neq 0$ אפשר לצמצם ב־x,y ולקבל:

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}=1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

כלומר:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן $x=\pm\frac{ay}{b}$. נציב זאת באחת המשוואות ונקבל:

$$1-\frac{y^2}{b^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

ולכן $y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$. לכן, אם לא מסתכלים על הצירים (שהרי אנו במקרה בו $x,y\neq 0$), נקבל 4 נקודות קריטיות:

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים.

ברור שהנקודה $(0,0)$היא נקודה קריטית.

אם $x=0$ אך $y\neq 0$ נקבל:

$$y-\frac{2x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0\Longrightarrow y-\frac{y^3}{b^2}=0\Longrightarrow y=\pm b$$

באופן דומה, אם $y=0$ אך $x\neq 0$ נקבל:

$$x=\pm a$$

אבל הנקודות שתתקבלנה הן :

$$(\pm a,0),(0,\pm b)$$

והן לא נמצאות בתחום אותו בדקנו.

לפיכך, יש לנו בסך הכל 5 נקודות קריטיות:

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right),(0,0)$$

ראשית, נבדוק את הראשית. ברור ש:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו.

אם נתקדם לאורך $x=y$ נקבל:

$$f(x,x)=x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

ואם נתקדם לאורך $x=-y$ נקבל:

$$f(x,-x)=-x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}<0$$

ולכן זו לא נקודת מינימום ולא נקודת מקסימום, כלומר זו נקודת אוכף.

עבור הנקודות האחרות, אתם יכולים לגזור פעמיים ולחשב את ההסיאן בנקודה.

אני אמסור הודעה למשפחות.

מצד שני, אפשר להסתמך על העובדות הבאות מאינפי 1:

i. אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם היא מקסימום מקומי של f^2.

ii. אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם היא מינימום מקומי של f^2.

iii. אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם היא מקסימום מקומי של f^2.

iv. אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם היא מינימום מקומי של f^2.

לכן, מספיק לחקור את:

$$g=f^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=x^2y^2-\frac{x^4y^2}{a^2}-\frac{x^2y^4}{b^2}$$

נחשב את מטריצת הסה:

$$g_x=2xy^2-\frac{4x^3y^2}{a^2}-\frac{2xy^4}{b^2},g_y=2x^2y-\frac{2x^4y}{a^2}-\frac{4x^2y^3}{b^2}$$

$$g_{xx} = 2y^2 - \frac{12x^2y^2}{a^2} - \frac{2y^4}{b^2}, g_{yy} = 2x^2 - \frac{2x^4}{a^2} - \frac{12x^2y^2}{b^2}, g_{xy} = 4xy - \frac{8x^3y}{a^2} - \frac{8xy^3}{b^2}$$

ולכן המטריצה היא:

$$H = \begin{pmatrix} 2y^2 - \frac{12x^2y^2}{a^2} - \frac{2y^4}{b^2} & 4xy - \frac{8x^3y}{a^2} - \frac{8xy^3}{b^2} \\ 4xy - \frac{8x^3y}{a^2} - \frac{8xy^3}{b^2} & 2x^2 - \frac{2x^4}{a^2} - \frac{12x^2y^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

נבדוק את הנקודות הקריטיות:

$$H_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)} = \begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9} \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא: $M_1 = -\frac{8b^2}{9} < 0$.

המינור השני הוא: $M_2 = \frac{64a^2b^2}{81} - \frac{16a^2b^2}{81} = \frac{48a^2b^2}{81} > 0$. לכן לפי סילבסטר הנקודה היא נקודת מקסימום של g.

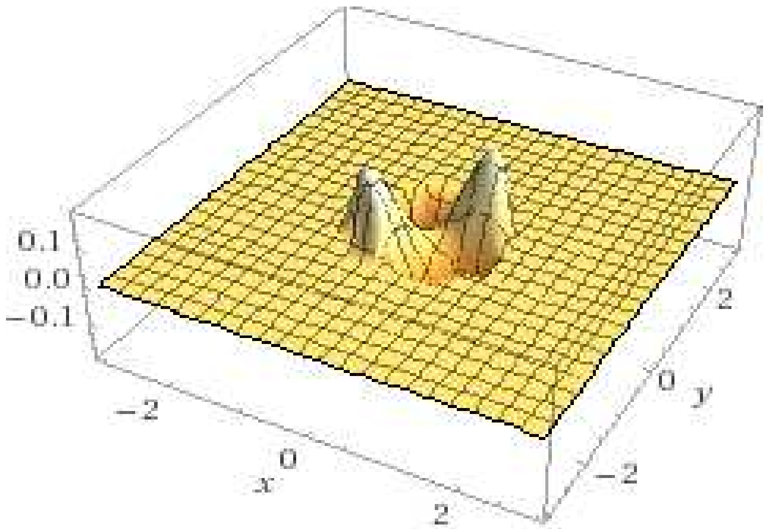
באופן דומה, עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות האחרות נקבל את אותם המינורים ולכן כולן נקודות מקסימום של g, כלומר של f^2.

נשתמש בעובדות שהזכרנו.

נשים לב שמתקיים: $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) > 0$ ולכן אלו נקודות מקסימום של f.

נשים לב שמתקיים: $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) < 0$ ולכן אלו נקודות מינימום של f.

הגרף נראה כך:



עבור $a,b=1$.

5. בעצם, התרגיל מראה שלהיות קיצון לאורך כל הישרים לא מספיק להיות קיצון.

(א) הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=-6x\left(y-x^2\right)-2x\left(y-3x^2\right),f_y=\left(y-x^2\right)+\left(y-3x^2\right)$$

ואכן הנקודה $(0,0)$ מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

(ב) ההרכבה היא הפונקציה:

$$f\circ g\left(t\right)=f\left(at,bt\right)=\left(bt-3a^2t^2\right)\left(bt-a^2t^2\right)=3a^4t^4-4a^2bt^3+b^2t^2$$

נחקור את הפונקציה כפונקציה של מתשנה אחד. נגזור ונשווה ל-0:

$$0=12a^4t^3-12a^2bt^2+2b^2t=t\left(12a^4t^2-12a^2bt+2b^2\right)$$

ולכן $t=0$ הוא אכן פתרון. נגזור שוב:

$$\left(f\circ g\right)''\left(t\right)=36a^4t^2-24a^2bt+2b^2$$

בנקודה $t=0$, נקבל:

$$(f\circ g)''(0)=2b^2>0$$

ולכן $t=0$ היא נקודת מינימום.

(ג) אם נתקדם לאורך המסלול $y=2x^2$ (שהוא לא קו ישר) נקבל:

$$f\left(x,2x^2\right)=\left(2x^2-3x^2\right)\left(2x^2-x^2\right)=-x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום כאשר $x=0$ ולכן הנקודה $(0,0)$אינה מינימום.

מצד שני היא אינה מקסימום לפי הסעיף הקודם ולכן בסך הכל זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך: