אינטגרלים לא אמיתיים.

1. הגדרות ודוגמאות ראשונות.

הגדרה 1: האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ נקרא אינטגרל לא אמיתי אם אחד התנאים הבאים מתקיימים:

1. קיימת לפחות נקודת אי-רציפות של f בין a ל-b ובנקודה הזאת יש ל-f גבול (אפילו חד צדדי) אין סופי.
2. לפחות אחד מגבולות האינטגרציה הוא אינסופי.

דוגמאות: 1. $I=\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

2. $I=\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$

הגדרה 2: נניח שהפונקציה f רציפה על הקטע $[a,b)$ אבל אינה רציפה משמאל ב-b, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to b\\ <}}\int_a^\lambda f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים.

דוגמאות:

1. $I=\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$, דהיינו: $I=\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}\int_0^\lambda \frac{dx}{x-2}$

$$\int_0^\lambda \frac{dx}{x-2}=\left[\ln|x-2|\right]_0^\lambda=\ln(2-\lambda)-\ln 2$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}(2-\lambda)=0^+ \quad\Rightarrow\quad \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}\ln(2-\lambda)=-\infty \quad\Rightarrow\quad I=-\infty$$

האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתבדר.

2. נחשב את $I=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. הפונקציה $f:x\to \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ הנתונה רציפה על הקטע $[1,2)$ אבל אי-רציפה משמאל ב-2. נגדיר $I(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_1^\lambda=\arcsin\frac{\lambda}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\arcsin\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{6}$$

מזה נובע: $I=\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}I(\lambda)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתכנס.

הגדרה 3: נניח שהפונקציה f רציפה על הקטע $(a,b]$ אבל אינה רציפה מימין ב-a, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to a\\ >}}\int_\lambda^b f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים. אם הגבול קיים והוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I=\int_0^1 x\ln x\,dx$. הפונקציה $f:x\to x\ln x$ הנתונה רציפה על הקטע $(0,1]$ אבל אי רציפה מימין ב-0. נגדיר: $I(\lambda)=\int_\lambda^1 x\ln x\,dx$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_\lambda^1 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_\lambda^1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2$$

קל לאשר ש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}\lambda^2\ln\lambda=0$. לכן $I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}I(\lambda)=-\frac{1}{4}$.

הגדרה 4: נתונים שלושה מספרים ממשיים a,b,c כך ש- $a<c<b$. נניח שהפונקציה f רציפה על $[a,c)\cup(c,b]$ ושב-c הפונקציה f אי-רציפה. אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to c\\ <}}\int_a^\lambda f(x)dx+\lim_{\substack{\lambda\to c\\ >}}\int_\lambda^b f(x)dx$$

בתנאי ששני הגבולות קיימים.

אם $\int_a^b f(x)dx$ קיים ואם הוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I=\int_{-1}^2 x^2\ln|x|\,dx$. הפונקציה $f:x\to x^2\ln|x|$ הנתונה רציפה על $[-1,0)$ ועל $(0,2]$, אבל ב-0 היא אי-רציפה. נגדיר:

$$I_1(\lambda)=\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ <}}\int_{-1}^\lambda x^2\ln|x|\,dx\ ;\ I_2(\lambda)=\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ >}}\int_\lambda^2 x^2\ln|x|\,dx$$

$$I_1(\lambda)=\int_{-1}^\lambda x^2\ln|x|\,dx=\int_{-1}^\lambda x^2\ln(-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(-x)-\frac{1}{9}x^3\right]_{-1}^\lambda=\frac{1}{3}\lambda^3\ln(-\lambda)-\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{9}$$

$$I_2(\lambda)=\int_\lambda^2 x^2\ln|x|\,dx=\int_\lambda^2 x^2\ln x dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3\right]_\lambda^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}\lambda^3\ln\lambda+\frac{1}{9}\lambda^3$$

קל לאשר ש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ <}}\lambda^3\ln(-\lambda)=0$ וש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}\lambda^3\ln\lambda=0$. לכן:

$$I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ <}}I_1(\lambda)+\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}I_2(\lambda)=-\frac{1}{9}+\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}=\frac{8}{3}\ln 2-1\,.$$

הגדרה 5: נניח שהפונקציה f רציפה על הקרן $[a,+\infty)$. אזי:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^\lambda f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים. אם הגבול קיים ואם הוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$. נגדיר $I(\lambda)=\int_1^\lambda\frac{dx}{x^2}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2}=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\lambda=\frac{-1}{\lambda}+1 \quad \Rightarrow \quad I=\lim_{\lambda\to+\infty}(\frac{-1}{\lambda}+1)=1.$$

<u>הגדרה 6:</u> נניח שהפונקציה f רציפה על הקרן $(-\infty,b]$. אזי:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to-\infty}\int_\lambda^b f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים.

<u>דוגמא:</u> נחשב את $I=\int_{-\infty}^0 e^x dx$. נגדיר $I(\lambda)=\int_\lambda^0 e^x dx$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_\lambda^0 e^x dx=\left[e^x\right]_\lambda^0=1-e^x \quad \Rightarrow \quad I=\lim_{\lambda\to-\infty}(1-e^\lambda)=1.$$

<u>הגדרה 7:</u> נניח שהפונקציה f רציפה על $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ כולו. אזי:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\lambda\to-\infty}\int_\lambda^a f(x)dx+\lim_{\mu\to+\infty}\int_a^\mu f(x)dx$$

בתנאי ששני הגבולות קיימים.

<u>דוגמא:</u> נחשב את $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. נגדיר: $I_1(\lambda)=\int_\lambda^0 \frac{dx}{1+x^2}$; $I_2(\mu)=\int_0^\mu \frac{dx}{1+x^2}$

$$I_1(\lambda)=\int_\lambda^0 \frac{dx}{1+x^2}=-\arctan\lambda \quad \Rightarrow \quad \lim_{\lambda\to-\infty} I_1(\lambda)=\frac{\pi}{2}$$

$$I_2(\mu)=\int_0^\mu \frac{dx}{1+x^2}=\arctan\mu \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mu\to+\infty} I_2(\mu)=\frac{\pi}{2}$$

לכן: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

<u>הגדרה 8:</u> אם הגבול (הגבולות) המגדיר (המגדירים) את האינטגרל הלא אמיתי קיים וסופי (קיימים וסופיים), אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) האינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

<u>הערה:</u> האינטגרל הלא אמיתי מתבדר אם הוא אינסופי או אם הוא לא מוגדר (דהיינו – הוא נתון על ידי גבול שאיננו קיים).

<u>דוגמאות:</u>

1. נחשב את $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. בשביל זה נגדיר $I(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{dx}{x}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_1^\lambda=\ln\lambda-\ln 1=\ln\lambda \quad \Rightarrow \quad I=\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=+\infty.$$

2. האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ מתבדר; נגדיר $I(\lambda)=\int_0^\lambda \frac{dx}{1-x}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_0^\lambda \frac{dx}{1-x}=\left[-\ln(1-x)\right]_0^\lambda=-\ln(1-\lambda)\Rightarrow I=\lim_{\substack{\lambda\to 1\\ <}} I(\lambda)=+\infty.$$

3. לכל מספר ממשי $b>0$, מתקיים $\int_0^b \sin x dx = 1-\cos b$. לביטוי הזה אין גבול ב- $+\infty$.
לכן האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ מתבדר.

<u>טענה 1:</u> האינטגרל $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

<u>הוכחה:</u> יהי $I_p(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{dx}{x^p}$; אזי $I_p(\lambda) = \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^{\lambda} = \frac{1}{1-p}\lambda^{1-p} - \frac{1}{1-p}$.

אם $p>1$, אזי $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-p} = 0$ ו- $\lim_{\lambda\to+\infty} I_p(\lambda) = \frac{1}{p-1}$. ז"א שהאינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס.

אם $p\le 1$, אזי $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-p} = +\infty$ והאינטגרל הלא אמיתי הזה מתבדר.

תרגיל פתור

1. **לחשב את כל הפונקציות הקדומות של** $f: x \to \frac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}$ **.**

2. **האם האינטגרל** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ **מתכנס או מתבדר? נמק את תשובתך.**

<u>פיתרון:</u>

1. תחום ההגדרה של הפונקציה f הוא: $\begin{cases} x>0 \\ \ln x > o \end{cases}$ זאת אומרת $D_f = (1,+\infty)$.

על הקרן $(1,+\infty)$ הפונקציה f רציפה (הוכח את זה ע"פ משפטים קלאסיים!), לכן יש לה פונקציות קדומות. נסמן ב- F את אחת הפונקציות האלה. כדי לחשב אותן, נשתמש בשיטת ההצבה:

נציב: $t = \ln(\ln x)$. לכן $dt = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \frac{dx}{x\ln x}$. מזה נובע:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{\frac{dx}{x\ln x}}{\ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \int \ln t + c = \ln|\ln(\ln x))| + c\ .$$

2. בלי הגבלת כלליות, אפשר להניח בשאלה הנתונה ש- $C=0$. ההתכנסות של האינטגרל הנתון שקולה לקיום גבול סופי ב- $+\infty$ עבור $F(x)$.

אבל $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

לכן $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty$,

ומכאן $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(\ln x)) + \infty$.

לכן האינטגרל הנתון מתבדר.

2. קריטריונים להתכנסות או להתבדרות

שתי הטענות הבאות נותנות לנו קריטריונים להתכנסות ו/או להתבדרות של אינטגרלים לא-אמיתיים, אבל לא מאפשרות לנו לחשב את הערך ה"מספרי" של אינטגרל מתכנס.

משפט 1 (קריטריון ההשוואה):

נתונות שתי פונקציות f ו- g רציפות על $\left[a,+\infty\right)$ כך שלכל $\left[a,+\infty\right)$ $0 \le f(x) \le g(x)\,,\, x \in$.

1. אם $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתבדר, אז $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתבדר.

הוכחה: נתון שלכל $\left[a,+\infty\right)$ $0 \le f(x) \le g(x)\,,\, x \in$ $\Leftarrow$ לכל $\lambda \ge a$ $0 \le \int_\alpha^\lambda f(x)dx \le \int_a^\lambda g(x)dx\,,$ והפונקציה $\lambda \to \int_a^\lambda f(x)dx$ היא פונקציה עולה של המשתנה λ. על פי משפט הסנדביץ', אם ל- $\int_a^\lambda g(x)dx$ גבול סופי כאשר $\lambda \to +\infty$, אזי גם ל $\int_a^\lambda f(x)dx$ גבול סופי כאשר $\lambda \to +\infty$. הסעיף השני מוכח בצורה דומה. נשאיר את ההוכחה לקורא.

דוגמאות:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ מתכנס משום שלכל $x>1$, $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$ ו- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנס (ע"פ הטענה הנ"ל).
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתבדר משום שלכל $x>1$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$ ו- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ מתבדר (על פי הטענה הנ"ל).

בעצם, ניתן להגיע לאותן התוצאות בדרך ישרה, בלי קריטריון ההשוואה. קריטריון אחר, מאוד שימושי, הוא קריטריון המנה שנביא כאן ללא הוכחה:

משפט 2 (קריטריון המנה): נתונות שתי פונקציות f ו- g חיוביות רציפות על $\left[a,+\infty\right)$. נניח שלמנה- $\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים גבול סופי $L>0$ כש- $x \to +\infty$. אז האינטגרלים הלא-אמיתיים $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ו- $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים שניהם.

דוגמאות:

1. נסמן $f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,\ g(x) = \frac{1}{x^2}$. ו- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. לכן האינטגרלים הלא אמיתיים $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,,\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנסים או מתבדרים שניהם. כיוון ש

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ מתכנס (ע"פ הטענה האחרונה בסעיף הקודם), האינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ מתכנס.

2. נעיין באינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

נסמן $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x)=\frac{1}{x}$.

אזי $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

מזה נובע ש- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$.

ידוע ש- $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ מתבדר. לכן האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ מתבדר.