מבוא להסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 1

קומבינטוריקה

תמורה (פרמוטציה) - סידור (מחדש) של עצמים בשורה.

התמורה היא פונ' חח"ע ועל מקבוצה לקבוצה עצמה.

מסמנים ב- σ .

הגדרה: יהי X קבוצה. פונ' $\sigma : X \to X$ נקראת **תמורה** של X אם σ חח"ע ועל.

דוגמא: בכמה אפשרויות ניתן לסדר 3 אנשים בשורה?

פתרון: כאן מדובר במספר התמורות האפשריות.

ניתן שמות, נניח יעל, דני, הדס.

סידור ראשון (ללא שינוי)   יעל   דני   הדס

" שני   דני   יעל   הדס

" שלישי   הדס   יעל   דני

" רביעי   יעל   הדס   דני

" חמישי   דני   הדס   יעל

" שישי   הדס   דני   יעל

ז"א סה"כ 6 תמורות.

בדרך קצרה

___ ___ ___

1   2 אפ'   3 אפ'

$$\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = \boxed{6}$$

טענה: (הכללה) מס' האפשרויות לסידור מחדש של n אנשים בשורה הנו $n!$.

הוכחה: לבחירת הראשון יש n אפשרויות, לשני $n-1$.
נניח באינדוקציה כי מספר האפ' לסידור $n-1$ אנשים הוא $(n-1)!$, ונקבל את הדרוש.

הגדרה לצרכי הבדיקה $(0! = 1)$

טענה שקולה ← מס' התמורות של איברי הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ הוא $n!$.

(חזרה אין [illegible])

(הסידור הנ"ל היה בלי חזרה.)

עם חזרה

כאשר נרצה לברר מהו מספר האפשרויות לסידור n עצמים, עם חזרות, דהיינו חלק מהעצמים זהים ממש, מס' האפשרויות ישתנה באופן הבא:

בהינתן k_1 עצמים מסוג 1
k_2 " " 2
$\vdots$
k_l עצמים מסוג l

נקבל

$$\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_l!} = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_l)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_l!}$$

② דוגמא: מספר האפשרויות לסידור מחדש של
המילה PEPPER.

ABCDEF
פתרון: אם האותיות היו שונות ← $6!$ אפשרויות

אפשרות אחת: למספר את הזהות כדי שתהיינה שונות:

$P_1\ E_1\ P_2\ P_3\ E_2\ R$

וכאן נקבל $6!$.

במידה ויש אותיות זהות כמו בדוגמא לעיל נקבל:

3 עותק מסוג P
2 " E

ולכן
$$\frac{6!}{2!\,3!}$$

חוק הכפל: בניסוי בשני שלבים כאשר בשלב הראשון יש m תוצאות אפשריות ובשלב השני יש n תוצאות, אזי יש בניסוי $m\cdot n$ תוצאות אפשריות.

כאשר (שלב שני ,שלב ראשון)

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ (m,1) & & \cdots & (m,n) \end{array}$$

נקבל

חוק הכפל המוכלל: בניסוי עם k שלבים כך שבשלב ה-i יש n_i תוצאות אפשריות נקבל $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות.

בחירת k עצמים מתוך n עצמים

מניחים בד"כ כי $k \leq n$.

בחירה עם חזרה ועם חשיבות לסדר.
(ניתן לבחור איבר יותר מפעם אחת)

$$\underbrace{\underset{n\text{ אפש'}}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\quad \underset{n\text{ אפש'}}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\quad \_\_\quad \cdots \quad \underset{n\text{ אפש'}}{\underset{\uparrow}{\_\_}}}_{k\text{ שלבים}} \longrightarrow n^k$$

לפי עיקרון הכפל

דוגמאות:

1. זריקת 2 קוביות. מס' האפ' בכל קוביה הוא 6

$$\underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}} = 36 \text{ אפשרויות}$$

2. הטלת מטבע 3 פעמים (או הטלת 3 מטבעות)

$$\underset{2}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{2}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{2}{\underset{\uparrow}{\_\_}} \longrightarrow 2^3 = 8 \text{ אפש'}$$

3. כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן לרשום באמצעות הספרות $0,1,2,\ldots,5$?

פתרון: אמנם סדר הספרות חשוב וספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת, נקבל

$$\underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{6}{\underset{\uparrow}{\_\_}}$$

6^4 אפשרויות

אך מספר לא יכול להתחיל ב-0 ולכן נחסיר $\underline{0}\ \_\ \_\ \_$

6^3 אפשרויות

③

פרק ב' ס לא מופיע ראשונה ולכן יש רק 5 אפ' בספרת האלפים

$\underset{5}{\underline{?}}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6} \longrightarrow \boxed{5\cdot 6^3}$

בחירה בלי חזרה ועם חשיבות לסדר:

הגדרה: מספר החליפות (Variations) הוא מס' האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים שונים, כאשר אין לבחור את אותו עצם יותר מפעם אחת, אך ישנה חשיבות לסדר הבחירה.

$\underset{\uparrow}{\underline{\quad}}\ \underset{\uparrow}{\underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \ldots\ \underset{\uparrow}{\underline{\quad}}$

n אפ' בשלב I   n-1 אפ'   n-k+1 אפ'

נקבל לפי הכפל:

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}=P_n^k$$

תרגיל: מכיתה בת 8 בנים ו-12 בנות בוחרים ועד בת 4 תלמידים. כל התפקידים בוועד שונים ותלמיד לא יכול להיבחר ליותר מתפקיד אחד.

א. בכמה אופנים ניתן לבחור את הוועד?

ב. בכמה אופנים ניתן לבחור את הוועד אם לתפקיד מזכיר יש לבחור אחד מהבנים ול-3 התפקידים הנותרים בנות?

פתרון: א. $n=20$ $k=4$

$$P_{20}^4=\frac{20!}{(20-4)!}=20\cdot19\cdot18\cdot17$$

ב. פרק א' ניסוי דו-שלבי: שלב א' בחירת בן $\frac{8!}{(8-1)!}$

שלב ב': 3 בנות מתוך 12, $\frac{12!}{(12-3)!}=12\cdot11\cdot10$

פרק ב'   ת"א

10   11   12 אפ' בתנו   8 אפ' לכן

צירופים

בחירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

<u>הגדרה:</u> מספר הצירופים (Combinations) הוא מס' האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים שונים, כאשר אין לבחור את אותו איבר יותר מפעם אחת (צ"א בלי חזרה) ובלי חשיבות לסדר בבחירה.

מספר האפשרויות יהיה $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{k}$ נקרא "המקדם הבינומי".

<u>הערה:</u> כל צירוף של k איברים ניתן לסידור ב-$k!$ אופנים שונים ומכאן

$$P_n^k = C_n^k \cdot k!$$

נוסחת הבינום של ניוטון

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי מתקיים:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

<u>תרגיל:</u> הוכח $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

<u>פתרון:</u> שימוש בבינום $a=b=1$.

(4)

בחירת k עצמים מתוך n בלי חשיבות לסדר ועם חזרה

ניתן להסתכל על הבעיה כבעית מילוי n תאים בk כדורים.

שקול לפתרון עבור השאלה: כמה פתרונות שלמים, אי שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_n=k$?

נפתור בשיטת "כוכבים ומחיצות":

נציג את $k=1+\dots+1$ כסכום של אחדות (כוכבים) ומחלקים אותם בעזרת n-1 מחיצות ל-n תאים (אולי ריקים).

מס' האפשרויות לסדרות הבנויות מ-s כוכבים ו-t מחיצות הוא $\binom{s+t}{s}$

לכן אצלנו נקבל כי n+k-1 מס' המקומות שיש למלא עם k כוכבים ו-n-1 מחיצות!

ונקבל $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

נשים לב כי יש התאמה חח"ע ועל בין פתרונות המשוואה לבין בחירה ללא חשיבות לסדר ועם חזרה מתוך $\{1,\dots,n\}$, וההתאמה היא שבהינתן פתרון $(x_1,\dots,x_n)$ הוא יעבור לבחירה שבה $n\geq i\geq 1$

נבחר i: x_i פעמים.

דוגמא: כמה פתרונות שלמים, אי שליליים $0 \le x_i \in \mathbb{Z}$ יש למשוואה

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$$

פתרון: שקול לשאלה עבור חלוקת 200 כדורים זהים

ל 100 תאים שונים (המשתנים)

200 (יחידות שלמות (האחדות))

הפתרון:

$$\binom{100+200-1}{200}$$

טבלת סיכום

בחירת k מתוך n

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרות	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
בלי חזרות	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

עקרון ההכלה וההפרדה: כידוע, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

בדומה

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

שימושי שכן קל יותר לחשב כמה איברים מקיימים תכונה מסוימת, זוג או שלוש תכונות, מאשר לחשב כמה איברים מקיימים לפחות תכונה אחת.