נכתב על ידי נועם יערי

מוסכמה

בכל השיעור, הפונקציה עליה נדבר אינטגרבילית ב - $[a,b]$ כאשר a קבוע ולכל $b>a$.

הגדרה

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(מוגדר אם הגבול קיים במובן הרחב)

דוגמה

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\arctan x\mid_0^b = \lim_{b\to\infty}(\arctan b - 0) = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה

$$\int_0^\infty \sin x\,dx$$

אינטואיטיבית:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2, \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0, \int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 2, \cdots$$

לכן כנראה שזה לא מתכנס.

פורמלית:

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty} -\cos x\,|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-\cos b - (-1))$$

הגבול לא קיים לכן האינטגרל הלא אמיתי לא קיים.

דוגמה

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\log x\,|_1^b = \lim_{b\to\infty}\log b = \infty$$

דוגמה – נפח גבול סיבוב

$$f(x) := \pi\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}dx = \pi\cdot -\frac{1}{x}\,|_0^{"\infty"} = \pi$$

שטח: $\int_1^\infty 2\pi\frac{1}{x}dx = \infty$

הגדרה

עבור פונקציה F כך שהגבול $c := \lim_{b\to\infty} F(b)$ קיים, נסמן $F(\infty) := c$.

מסקנה

אם F פונקציה קדומה של f קדומה של f ו f – רציפה ב - $[a,\infty)$ אז

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)|_a^\infty := F(\infty) - F(a)$$

הוכחה

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(F(b)_{\to F(\infty)} - F(a)\right) = F(\infty) - F(a)$$

$\square$

למה

לכל $a<c$:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

הוכחה

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

$\square$

הגדרה

יהי a מספר קבוע. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[b,a]$ כאשר $b<a$. נגדיר

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

יש משפטים אנלוגיים לאלה שראינו גם עבור $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ (הוכחות זהות)

הגדרה

תהי f אינטגרבילית בכל קטע סגור. נקבע מספר a ונגדיר

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

הערה

הגדרת $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ אינה תלויה בבחירת המספר a.

הוכחה

יהי $c \neq a$. בלי הגבלת הכלליות, $a < c$. אז

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \left(\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\right) =$$
$$=_{\text{תרגיל:להוכיח!}} \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$\square$

הערה

לא תמיד $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$

למשל:

$$f(x) = sign\ (x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

לכל b.

אבל $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = -\infty, \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \infty$

וסכומם לא מוגדר.

תרגיל

התבי"ש:

(א) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ קיים.

(ב) לכל שתי פונקציות $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עם $\lim_{b\to\infty} g_i(b) = \infty$ מתקיים $\lim_{b\to\infty} \int_{-g_1(b)}^{g_2(b)} f(x)dx$ קיים.

(ובמקרה זה, האינטגרל לפי א ו-ב שווים)

למה – קריטריון קושי לגבול של פונקציה

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

קיים (במובן הצר) אם ורק אם לכל ε חיובי יש N שאחריו $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (כלומר: לכל $N < x, y$ (בהג"כ $x < y$) מתקיים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$)

הוכחה

מהגדרת גבול בלשון הסדרות וקריטריון קושי לסדרות.

מסקנה – קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל

$\int_a^\infty f(x)dx$ קיים במובן הצר $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שלכל $N < b_1 < b_2$ מתקיים

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

הוכחה

נסמן $F(b) := \int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^\infty f(x)dx \overset{\text{הגדרה}}{=} \lim_{b\to\infty} F(b)$$

מקריטריון קושי הגבול קיים $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שלכל $N < b_1 < b_2$:

$$\left|\overbrace{F(b_2) - F(b_1)}^{\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx}\right| < \varepsilon$$

למה – מבחן ההשוואה

יהי a קבוע. יהיו f, g אינטגרביליות ב – $[a, b]$ לכל $a < b$. אם יש קבוע $c > 0$ כך ש -

$$0 \le f(x) \le c \cdot g(x)$$

לכל $a \le x$ (או רק: יש $a \le \tilde{a}$ כך שזה מתקיים לכל $\tilde{a} \le x$) אזי:

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ קיים וסופי אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ קיים וסופי.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$, אז גם $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$

הוכחה

<u>טענת עזר:</u> תהי $f(x) \geq 0$ ב- $[a,\infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, $b > a$). אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ קיים במובן הרחב (והוא ∞ או סקלר אי שלילי)

<u>הוכחה:</u> נסמן $F(b) \coloneqq \int_a^b f(x)dx$.

F עולה: עבור $b_1 < b_2$,

$$F(b_2) = \int_a^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geq \int_a^{b_1} f(x)dx = F(b_1)$$

לכן $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ קיים במובן הרחב. לכל $a < b$, $F(b) = \int_a^b f(x)_{\geq 0}dx \geq 0$ לכן $0 \leq F(\infty)$.

מטענת העזר, סעיף ב הוא ניסוח של סעיף א על דרך השלילה.

הוכחת א:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b cg(x)dx =_{\text{לינאריות}} c\int_a^b g(x)dx \to \text{מספר} < \infty$$

לכן $\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\coloneqq F(b)\text{פונקציה עולה וחסומה}} \leq c\int_a^b g(x)dx \leq c\underbrace{\int_a^\infty g(x)dx}_{\in\mathbb{R}} < \infty$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b)$$

קיים וסופי.

$\square$