אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל 3

שאלה 1

(א) נניח כי x_1, x_2 פתרונות של המערכת $Ax=b$. אזי:

$$Ax_1 = b$$
$$Ax_2 = b$$

נחבר את המשוואות ונקבל:

$$A(x_1)+A(x_2)=b+b$$
$$\Downarrow$$
$$A(x_1+x_2)=2b$$

אבל מאחר ו- $b\neq 2b$ כי $b\neq 0$, נקבל ש- (x_1+x_2) הוא פתרון של המערכת $Ax=2b$ ולא של $Ax=b$.

(ב) הפרכה.

נניח בשלילה שקיימת מערכת לא הומוגנית כך ש- $x_0=\bar{0}$ פתרון.

כלומר:

$$Ax_0=b$$

אבל $x_0=\bar{0}$ ולכן:

$Ax_0=A\cdot\bar{0}=0$ (כפל שורה-שורה/עמודה-עמודה)

$$\Downarrow$$

$b=0$ בסתירה לכך ש- $b\neq 0$.

$$\Downarrow$$

לא קיימת מערכת לא הומוגנית $Ax=b$, $b\neq 0$ כך שהוקטור האפס הינו פתרון שלה.

שאלה 2

בשאלה זו נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מחשבים כל מכפלה ע"פ חוקי כפל המטריצות, ובהתאמה:

$$5BJ-3B=\begin{pmatrix}-6 & 7 & 5 & -9\\ 3 & -11 & 7 & -1\\ 0 & -3 & 2 & 14\end{pmatrix},\quad JA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 4\\ 3 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$J^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad BJ^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

את הביטוי האחרון, $3J-2B$, לא ניתן, כמובן, לחשב כיוון ש-J מטריצה מסדר 4×4 בעוד ש-B מטריצה מסדר 3×4. כלומר סדרי המטריצות אינם זהים ולכן חיבורן אינו מוגדר.

שאלה 3

א

$$AB=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&2\\6&-5&8\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&21&-4\\70&13&112\\9&2&16\end{pmatrix}$$

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}-11&21&-4\\70&13&112\\9&2&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&21&-4\\70&13&112\\9&2&16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1555&34&2332\\1148&1863&2968\\185&247&444\end{pmatrix}$$

<u>מצד שני:</u>

$$A^2=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-19&-12\\48&-33&68\\8&-4&10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&2&2\\6&-5&8\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&2\\6&-5&8\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-2&26\\-4&77&20\\50&13&84\end{pmatrix}$$

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}2&-19&-12\\48&-33&68\\8&-4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21&-2&26\\-4&77&20\\50&13&84\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-482&-1623&-1336\\4540&-1753&6360\\684&-194&963\end{pmatrix}$$

כלומר מטריצה שונה!!

הסיבה ש- $(AB)^2\neq A^2B^2$

הוא כי $(AB)^2=ABAB$

<u>ובכלל</u> BA לא שווה ל- AB.

שימו לב כי <u>לא</u> מתקיים $tr[(AB)^2]=tr[A^2B^2]$

זה נובע מכך שיש לכפול משמאל מטריצות המטריצות...

ועקבה של מכפלה $\neq$ מכפלת העקבות (שאלה III ג')

(ג)

$$A+5I=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-2&1\\4&12&8\\1&1&6\end{pmatrix}$$

$$A-I=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&7&8\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\4&6&8\\1&1&0\end{pmatrix}$$

(ד)

$$(A+\alpha I)^2=(A+\alpha I)(A+\alpha I)$$

$$=(A+\alpha I)A+\alpha(A+\alpha I)$$

$$=A^2+\alpha A+\alpha A+\alpha^2 I=A^2+2\alpha A+\alpha^2 I$$

(כיון ש- α, A ו- I מתחלפים בכפל)

שאלה 4 (א). 1. נניח כי יש ב- A שורת אפסים, למשל שורה i כולה אפסים, כלומר $A_{it}=0$ לכל t.

אז לכל j מתקיים

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{tj}=\sum 0\cdot B_{tj}=0$$

לכן לכל j (i כמו קודם, קבוע) מתקיים $C_{ij}=0$ לכן השורה ה-i של C הינה אפסים.

2. נניח כי יש ב- B עמודת אפסים, למשל עמודה j כולה אפסים, כלומר $B_{tj}=0$ לכל t.

לכן

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{tj}=0$$

לכל i. (j כמו קודם)

כיון ש- $C_{ij}=0$ לכל i, הרי שגם עמודה j של C הינה כולה אפסים.

ג) נתון כי יש ב- A שורה שלמה של אפסים, אז לכל מטריצה (מתאימה) X תהיה במטריצה AX שורת אפסים.

אבל אם $AX=I$, צריך להיות שורת אפסים ב- I, אבל לפי הגדרת I, זה לא אפשרי.

הערה: אם יש ב- A עמודה שלמה של אפסים אז (לפי סעיף א') לא קיימת מטריצה Y כך ש- $YA=I$ (לפי אותו שיקול)

שאלה 5 א) נסמן $C=A+B$. אז $C_{ii}=A_{ii}+B_{ii}$

לכן
$$tr(C)=\sum_{i=1}^{n} C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(A_{ii}+B_{ii})$$
$$=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}+\sum_{i=1}^{n} B_{ii}=tr(A)+tr$$

ב) נסמן $C=\alpha A$ אז $C_{ii}=\alpha A_{ii}$

לכן:
$$tr(C)=\sum_{i=1}^{n} C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\alpha A_{ii}=\alpha\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$
$$=\alpha(tr(A))$$

ג) תהיינה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$tr(A)=5$ $tr(I)=2$

$AI=A$ לכן $tr(AI)=5$

אבל $(tr(A))(tr(I))=5\cdot 2=10$

שאלה 6

נסמן $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

ונפתור את המשוואה המטריציאלית $AX = XA$. כלומר

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ 4x_3 & 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 & x_1 + 4x_2 \\ 3x_3 & x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$$

ונקבל את המשוואות

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 = 3x_1 &\Rightarrow x_3 = 0 \\ 4x_3 = 3x_3 &\Rightarrow x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{(כמובן)}$$

$$4x_4 = x_3 + 4x_4 \Rightarrow x_3$$

כלומר $\boxed{x_3 = 0}$

$$3x_2 + x_4 = x_1 + 4x_2$$

$$x_4 - x_1 = x_2$$

נסמן $\boxed{x_4 = b \qquad x_1 = a}$

אז $\boxed{x_2 = b - a}$

קיבלנו מה שרצינו /

$$X = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

מקיימת את התחלופה בכפל עם A. (כמובן אם $a=b=1$ נקבל I

אם $a=b=0$ נקבל 0)

יפה

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 4b-3a \\ 0 & 4b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 4b-3a \\ 0 & 4b \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u> בפתרון שקיבלנו לא 4 משוואות ב-4 נעלמים, מצאנו משפחה <u>אינסופית</u> של פתרונות התלויה <u>בשני פרמטרים</u> (זה נקרא "שני דרגות חופש"). עוד נלמד בהמשך כיצד להגיע למערכת משוואות כלשהי, לדעת כמה דרגות חופש יש במשפחת הפתרונות.

<u>שאלה 7</u>

א. כאמור בסעיף זה אנו נדרשים להוכיח כי:

$$A^T \cdot A = \underline{\underline{0}} \xleftrightarrow{\text{if and only if}} A = \underline{\underline{0}}$$

כלומר **יש להוכיח בשני הכיוונים !!!**

כיוון ראשון: אם $A = \underline{\underline{0}}$, כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי באופן טריוויאלי מחוק כפל המטריצות מתקיים:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ובזאת סיימנו את הכיוון הראשון.

כיוון שני: אם $A^T \cdot A = \underline{\underline{0}}$, אזי ביחס לייצוג הכללי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

מתקבל:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & a \cdot b + c \cdot d \\ a \cdot b + c \cdot d & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

המטריצה המתקבלת באגף ימין תהיה מטריצת האפס, אם ורק אם כל אבריה הם אפסים. בפרט אברי האלכסון הראשי מתאפסים גם כן:

$$\left(A^T \cdot A\right)_{1,1} = a^2 + c^2 = 0 \quad and \quad \left(A^T \cdot A\right)_{2,2} = b^2 + c^2 = 0$$

כאמור אברי A הם ממשיים, ולכן:

$$a^2, b^2, c^2, d^2 \geq 0 \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

מכאן שאיברי האלכסון הראשי מתאפסים אם ורק אם:

$$a^2 + c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c = 0$$

$$b^2 + d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = d = 0$$

ובזאת סיימנו גם את הכיוון השני.

בסה"כ הוכחנו את שני הכיוונים כנדרש $\Leftarrow$ **מש"ל**.

ב. בחישוב ישיר:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אין בכך סתירה לסעיף א, כיוון שבסעיף א הסתמכנו על כך שהמטריצה A היא ממשית ! העוד שכעת A מטריצה מעל שדה המרוכבים.
שימו לב שבמקרה זה גם מתקיים: $A = A^T$, ובפרט:

$$A^T \cdot A = A \cdot A = A^2 = \underline{\underline{0}}$$

שאלה 8

נתונות 2 מטריצות $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(א) מצא את $(AB)_{11}, (AB)_{13}, (AB)_{22}$

פתרון:

$$(AB)_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot 1+1\cdot 0+4\cdot 1=6$$

$$(AB)_{13}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=2\cdot 1+1\cdot 0+4\cdot 0=2$$

$$(AB)_{22}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=0\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 0=-1$$

(ב) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A^2.

פתרון:

$$C_1(AB)=AC_1(B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השניה של ABכסכום משוקלל של שורות B.

פתרון:

$$R_2(AB)=R_2(A)B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+$$
$$(-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ד) בעזרת כפל עמודה שורה פרק את AB לסכום של 3 מטריצות מגודל 2×3 וחשב את התוצאה הסופית AB.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה: בהנתן מטריצה A. החזקה של Aמוגדרת להיות $A^n:=\underbrace{AA\cdots A}_{n\,times}$

שאלה 9

יהיו מטריצות: A בגודל 3×3 , B בגודל 4×5, Cבגודל 5×1 ; D בגודל 5×4 ו־ E בגודל 3×5 אלו מבין הפעולות הבאות מוגדרת? במידה והפעולה מוגדרת מה גודל המטריצה המתקבלת? (פתרון בסוגריים)

(א) BCB (לא מוגדר)

(ב) $B+D$ (לא מוגדר)

(ג) A^3E ($A^3E\in\mathbb{F}^{3\times 5}$)

(ד) $A(E+E)D$ ($A(E+E)D\in\mathbb{F}^{3\times 4}$)

שאלה 10

.1

פתרון:

$$\begin{pmatrix} -11 & -76 & 110 & -61 \\ 24 & -82 & 95 & 5 \\ -12 & 9 & 11 & -5 \\ -10 & -24 & 42 & -6 \end{pmatrix}$$

.2

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

פתרון: לא מוגדר. זה נסיון לכפול

$$(4 \times 1) \cdot (4 \times 4)$$

הגדלים לא מתאימים.

.3

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 11

תהי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את A^{5777}

פתרון: נשים לב ש

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A^{5776} = (A^2)^{2888} = \begin{pmatrix} (1)^{2888} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2888} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2888} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ולכן

$$A^{5777} = IA = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$