

4. מטילים 5 פעמים מטבע הוגן. בכל פעם, אם התקבל ראש הכניסו לכד כדור לבן, אחרת הכניסו כדור שחור.

א. מה הסיכוי שבכד יש רק כדורים לבנים?

ב. ענה שוב על חלק א' בהינתן שלאחר מכן הוציאו מהכד 5 כדורים, עם החזרה, והוצאו 5 כדורים לבנים.

תשובה:

א. בכד יש 5 כדורים לבנים אם ורק אם כל ההטלות של המטבע ההוגן יצאו ראש ולכן הסתברות המאורע (שנסמנו ב A_5):

$$P(A_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

ב. נסמן ב A_i את המאורע שבכד יש i כדורים לבנים, וב B את המאורע שהוצאו 5 כדורים לבנים ב 5 שליפות עם החזרה. אז

$$P(A_i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$$

הסבר: כדי שיהיו בכד i כדורים לבנים, מתוך 5 ההטלות i יצאו ראש, ו $5-i$ יצאו זנבות.

הסתברות של i ראשים היא $\left(\frac{1}{2}\right)^i$, ההסתברות של $5-i$ זנבות היא $\left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$, והגורם

$\binom{5}{i}$ מייצג את בחירת ההטלות שבהן יצא ראש.

כמו כן, $P(B|A_i) = \left(\frac{i}{5}\right)^5$ שכן בהנתן שבכד i כדורים לבנים מתוך 5, ההסתברות להוציא לבן היא $\frac{i}{5}$.

נשאר לשים לב ש A_i זרים בזוגות וממצים (בדקו זאת), ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה (המעבר השני) ונוסחת בייס (המעבר הראשון):

$$\begin{aligned} P(A_5|B) &= \frac{P(B|A_5)P(A_5)}{P(B)} = \frac{1 \cdot 1/32}{\sum_{i=1}^5 P(B|A_i)P(A_i)} = \\ &= \frac{1/32}{\sum_{i=1}^5 (i/5)^5 (1/2)^5} = \frac{3125}{11000} \end{aligned}$$

שימו לב שהמידע הנוסף מגדיל את ההסתברות בערך פי 10.