פתרון תרגיל בית 3 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. יהי $\sigma \in S_n$ מחזור מאורך k. חשבו את $o(\sigma)$ והוכיחו קביעתכם.

פתרון. נסמן $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ ונוכיח כי $o(\sigma) = k$. קל לחשב שמתקיים

$$\sigma^j(a_0) = a_{j \bmod k}$$

(שימו לב, האינדקס הוא מודולו k כדי לאפשר לנו לעבוד רק בטווח $\{0, 1, \dots, k-1\}$).
ראשית, נבדוק כי $\sigma^k = \mathrm{id}$. לכל a_i מתקיים

$$\sigma^k(a_i) = \sigma^{k-1}(a_{i+1}) = \cdots = \sigma(a_{i-1}) = a_i$$

ולכל $m \neq a_i$, $\sigma^k(m) = m$ (כי $\sigma(m) = m$). נותר להוכיח מינימליות. אבל אם $j < k$, אז $\sigma^j(a_0) = a_j \neq a_0$, כלומר $\sigma^j \neq \mathrm{id}$.

שאלה 2. בתרגיל הבית הקודם חישבתם חזקות של התמורה $\sigma = (257)(423)(57)(3416) \in S_8$. מצאו את סדרה ואת תת־החבורה הנוצרת על ידה.

פתרון. בתרגיל הקודם גילינו ש

$$\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$$

וש- $\sigma^3 = \mathrm{id}$. לכן $\sigma^{-1} = \sigma^2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$. אם כן, $o(\sigma) = 3$ ולכן ב-$\langle\sigma\rangle$ יש בדיוק שלושה איברים שכבר מצאנו:

$$\langle\sigma\rangle = \left\{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\right\} = \{\mathrm{id}, (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5), (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)\}$$

שאלה 3. עוד הראיתם בתרגיל הקודם כי קבוצת המטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

היא תת־חבורה של $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. מצאו את הסדר של H ואת הסדר של איברי H. האם H ציקלית?

פתרון. עבור כל אחד מ-a, b, c יש לנו שתי אפשרויות בלתי תלויות לבחירה. לכן ישנם $2^3 = 8$ איברים בחבורה H. כלומר $|H| = 8$. היא לא ציקלית, כי היא לא אבלית. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הסדר של האיברים הוא 1 עבור איבר היחידה (מטריצת הזהות), שני האיברים שבהם $a = b = 1$ הם מסדר 4 ושאר האיברים מסדר 2. מפני שאין איבר מסדר 8, זו עוד דרך להוכיח כי H אינה ציקלית.

שאלה 4. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי ב-G. הוכיחו כי $T \leq G$.

פתרון. נוכיח זאת לפי הקריטריון הפחות מקוצר, כלומר נוכיח:

א. $e \in T$.

ב. אם $g_1, g_2 \in T$, אזי $g_1 g_2 \in T$.

ג. אם $g \in T$, אזי $g^{-1} \in T$.

אכן,

א. $e \in T$, כי $o(e) = 1 < \infty$.

ב. נניח ש-$g_1, g_2 \in T$. נניח כי $m = o(g_1), n = o(g_2)$ עבור $n, m < \infty$. כיוון שהחבורה G אבלית,

$$(g_1 g_2)^{mn} = g_1^{mn} g_2^{mn} = (g_1^m)^n (g_2^n)^m = e^n e^m = e$$

הוכחנו שקיים $k = mn < \infty$ שעבורו $(g_1 g_2)^k = e$. לכן, $o(g_1 g_2) \leq k < \infty$, כלומר $g_1 g_2 \in T$.

ג. הוכחנו בתרגול ש-$o(g^{-1}) = o(g)$ לכל $g \in G$. בפרט, אם $g \in T$, אזי $o(g) < \infty$, ולכן גם $o(g^{-1}) = o(g) < \infty$.

בסך הכל, לפי הקריטריון המקוצר, $T \leq G$.

שאלה 5. יהיו $f\colon G \to H$ ו-$g\colon H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f\colon G \to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$, ושלכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $g(h_1 h_2) = f(h_1) f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i = f(g_i)$. לכן לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$(g \circ f)(g_1 g_2) = g(f(g_1 g_1)) = g(f(g_1) f(g_1)) = g(f(g_1)) g(f(g_1)) = (g \circ f)(g_1)(g \circ f)(g_2)$$

ולכן $g \circ f$ הומומורפיזם.

ודאו שאתם יודעים לנסח טענות דומות לאפימורפיזמים, מונומורפיזמים ואיזומורפיזמים.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ג. $f\colon S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

ד. $f_x\colon G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x \in G$ איבר.

פתרון. ההוכחות כאן לא מלאות!

א. הפונקציה f היא הומומורפיזם. אבל היא לא מונומורפיזם כי למשל $f(1)=f(-1)=1$. היא גם לא אפימורפיזם, כי למשל $-1\notin \operatorname{im} f$, שהרי לכל $x\in\mathbb{Q}^*$ מתקיים $x^2>0$.

ב. הפונקציה f היא הומומורפיזם, באופן דומה לסעיף הקודם. אבל היא לא מונומורפיזם, שוב, כי למשל $f(1)=f(-1)=1$. הפעם היא כן אפימורפיזם, כי לכל $x\in\mathbb{R}^+$ קיים שורש רביעי $\sqrt[4]{x}\in\mathbb{R}^*$ שהוא ממשי שאינו אפס, ואז $f(\sqrt[4]{x})=x$.

ג. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל

$$f(\mathrm{id}\cdot\mathrm{id})=1\neq 1+1=f(\mathrm{id})+f(\mathrm{id})$$

ד. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh)=xghx^{-1}=xgx^{-1}xhx^{-1}=f_x(g)f_x(h)$$

נעזר בשאלה **??** כדי לראות ש-f_x הוא חח"ע. אם $xgx^{-1}=e$, אז $g=x^{-1}ex$ ולכן $g=e$. כלומר $\ker f_x=\{e\}$. כדי להראות ש-f_x הוא על, לכל $h\in G$ נתבונן באיבר $x^{-1}hx$, שהוא אכן מקור עבורו כי $f_x(x^{-1}hx)=h$.

שאלה 7. יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{im} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G\cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

פתרון.

א. לכל $h_1,h_2\in\operatorname{im} f$ קיימים $g_1,g_2\in G$ כך ש-$f(g_i)=h_i$. נחשב

$$h_1h_2=f(g_1)f(g_2)\overset{\star}{=}f(g_1g_2)\overset{*}{=}f(g_2g_1)\overset{\star}{=}f(g_2)f(g_1)=h_2h_1$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G, ובשיוויונות המסומנים $\star$ השתמשנו בכך ש-f הומומורפיזם. כלומר כל זוג איברים ב-$\operatorname{im} f$ מתחלפים, ולכן $\operatorname{im} f$ אבלית. כדי להפריך חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר את $G=S_3$. עבור H אפשר לבחור כל חבורה. למשל $H=\mathbb{Z}_5$. אז עבור ההומומורפיזם הטריוויאלי $f\colon S_3\to\mathbb{Z}_5$ השולח כל איבר ל-0, נקבל $\operatorname{im} f=\{0\}$. כמובן שזו חבורה אבלית, אבל S_3 לא.

ב. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi\colon G\to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $\operatorname{im}\phi=H$. אם G היא אבלית, אז גם H היא אבלית לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\phi^{-1}\colon H\to G$ ולכן אם H אבלית, אז גם G אבלית.

שאלה 8 (רשות)**.** מצאו חבורה אינסופית שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m>1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

שאלה 9 (רשות)**.** נקרא למטריצה M מטריצת תמורה אם היא מטריצה שכל האיברים בה הם אפסים ואחדות, ושבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק פעם אחת 1. למשל

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

היא מטריצת תמורה בגודל 4×4. הוכיחו שאוסף מטריצות התמורה בגודל $n \times n$ הוא חבורה עם הפעולה של כפל מטריצות. התאימו לכל איבר $\sigma \in S_n$ מטריצת תמורה M_σ כך שיתקבל איזומורפיזם, והוכיחו שהסימן של σ הוא הדטרמיננטה של M_σ.

בהצלחה!