(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ה מועד ב'

הצעת פתרון | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה a.

הוכח שהפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ גזירה בנקודה a, ונגזרתה בנקודה זו היא $f'(a)\cdot g(a)+g'(a)\cdot f(a)$.

בעצם נתון כי

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

קיימים

כעת נחשב לפי ההגדרה את הנגזרת של $f(x)\cdot g(x)$ בנקודה a

$$lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=lim_{h\to 0}[g(a+h)\frac{f(a+h-f(a)}{h}+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}]=[lim_{h\to 0}g(a+h)]\cdot f'(a)+f(a)\cdot g'(a)$$

$$=f'(a)\cdot g(a)+g'(a)f(a)$$

בפרט הן גזירות ולכן גם היא גזירה.

שאלה 2

תהי a_n סידרה כך שלכל תת־סידרה שלה יש תת־סידרה המתכנסת ל a. (בפירוט: לכל תת־סידרה b_n של a_n יש תת־סידרה c_n של b_n המקיימת $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.)

הוכח: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

תהי a_n סדרה המקיימת שלכל ת"ס שלה יש ת"ס המתכנסת לa.

ראינו בהרצאה, לכל סדרה קיימים גבול עליון ותחתון במובן הרחב.

נסתכל על שתי תתי הסדרות שגבולן הוא הגבול העליון התחתון.

$a_{n_k} \to \overline{lim} a_n, a_{n_j} \to \underline{lim} a_n$

כעת מהנתון לשתי הסדרות האלה יש ת"ס מתכנסת לa, $a_{n_{k_m}} \to a, a_{n_{j_r}} \to a$

אבל מהתכנסותן לגבול חלקי

וממשפט האומר כי כל הגבולות החלקיים של סדרה מתכנסת שווים, נובע כי

$$a = \overline{lim} a_n = \underline{lim} a_n = a$$

כלומר, הגבול העליון והתחתון שווים לa ושוב ממשפט, $lim_{n\to\infty} a_n = a$.

שאלה 3

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

ג. מצא את הערכים של a שעבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$ מתכנס.

תשובה:

סעיף א

ננסה התכנסות בהחלט

$$a_n = |\frac{(-1)^n}{n - ln(n)}| = \frac{1}{n - ln(n)}$$

אבל $\frac{1}{n-ln(n)} \geq \frac{1}{n}$, וממבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני קיבלנו שאינה מתכנסת בהחלט, נעבור למתכנסת בתנאי.
ננסה לייבניץ $a_n := \frac{1}{n-ln(n)}$, כלומר צריך להוכיח $a_n \to 0$ ויורדת
ראשית $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n-ln(n)} \leq \frac{1}{n}$ ($n \geq ln(n)$), ולכן מסנדוויץ' $a_n \to 0$.
את היותה של a_n מונוטונית יורדת, נראה באמצעות נגזרת שלילית בתחום המתאים. נגדיר $f(x) := \frac{1}{x-ln(x)}$

$$f'(x) = \frac{-(x - ln(x))'}{(x - ln(x))^2} = \frac{-1 + \frac{1}{x}}{(x - ln(x))^2}$$

ברור כי המכנה תמיד חיובי, והמונה שלילי החל מ$x > 1$, במקרה שלנו יורדת בוודאות החל מ$n \geq 2$
ולכן אפשר להפעיל לייבניץ החל בשלב זה, סיימנו וקיבלנו **מתכנסת בתנאי.**

סעיף ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^2}$$

היא בהחלט חיובית, ולכן מתכנסת בהחלט או מתבדרת. נראה כי יורדת על מנת להפעיל עיבוי
שוב, נסתכל על הפונקציה

$$f(x) := \frac{ln(x)}{x^2}$$

נגזור לקבלת

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot ln(x)}{x^4} = \frac{x(1-2ln(x))}{x^4}$$

המכנה תמיד חיובי, והמונה החל משלב מסויים שלילי, לכן מספיק להסתכל על זנב הטור ואפשר להשתמש בעיבוי.
בעצם הטור מתכנס ומתבדר יחד עם

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{ln(2^n)}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot ln(2)}{2^n} = ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

כעת, נפעיל מבחן המנה על הטור שקיבלנו $b_n := \frac{n}{2^n}$, נקבל

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2} < 1$$

ולכן הטור מתכנס, ביחד עם הטור שלנו- **מתכנס בהחלט**

סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{ln(n)}$$

ראשית תנאי הכרחי הוא $a^{ln(n)} \to 0$ וזה קורה אם ורק אם $-1 < a < 1$
הגדרנו חזקה ממשית רק לחיוביים, ובעצם נבחן רק את התחום $0 < a < 1$ (עבור $a = 0$ ברור שמתכנס לאפס)
אם $0 < a < 1$, אפשר להפעיל עיבוי (קל להראות מונוטונית יורדת ומתכנסת לאפס) ואז מתכנס ומתבדר ביחד עם

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{n \cdot ln(2)} = a^{ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2a)^n$$

לפי הטור ההנדסי זה מתכנס אם ורק אם $0 < 2a < 1$ ולכן סיימנו.
לסיכום, מתכנס עבור $0 \le a < \frac{1}{2}$

שאלה 4

א. מצא את הגבול $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$.

ב. מצא את הגבול העליון והגבול התחתון של הסידרה $a_n := \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^{\left(n^{\left((-1)^n\right)}\right)}$.

סעיף א

$$lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xsin(x)}) = lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-x}{x^2sin(x)}$$

המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{2xsin(x)+x^2cos(x)}$$

שוב המכנה והמונה שואפים לאפס, שוב נפעיל לופיטל

$$lim_{x\to 0}\frac{-sin(x)}{2sin(x)+2xcos(x)+2xcos(x)-x^2sin(x)}$$

שוב נפעיל לופיטל

$$lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{2cos(x)+2cos(x)-2xsin(x)+2cos(x)-2xsin(x)-2xsin(x)-x^2cos(x)} = \frac{1}{2+2+2} = \frac{1}{6}$$

סעיף ב

<u>טענת עזר</u>

אם מצאנו שתי תתי סדרות a_{n_k}, a_{n_j} המכסות את הסדרות ויש להן גבול חלקי $a_{n_k}\to a, a_{n_j}\to b$ - אלה הגבולות החלקיים היחידים.

בפרט, הן קובעות את הגבול העליון והתחתון.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה שקיימת ת"ס $a_{n_m}\to c$ כך ש$a\neq c, b\neq c$

כעת נחלק למקרים

מקרה א': יש כמות סופית של איברים מתת הסדרה a_{n_k} ואינסוף איברים מהסדרה a_{n_j}

מסתכלים על זנב הסדרה ולכן כולה מתכנסת לb.

מקרה ב': יש כמות סופית של איברים מתת הסדרה a_{n_j} ואינסוף איברים מהסדרה a_{n_k}

מסתכלים על זנב הסדקה ולכן מתכנסת לa.

מקרה ג': יש אינסוף איברים משתי תתי הסדרות

ואז אם $a = b$ מקבלים שהיא גם מתכנסת אליהן, שתי תתי סדרות המכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו הגבול.
אחרת $a \neq b$ ואז אינה מתכנסת כי בעלת שני גבולות חלקיים שונים, בפרט אין גבול חלקי נוסף.

<u>חזרה לשאלה</u>

במקרה שלנו, נסתכל על האינדקסים הזוגיים והאי זוגיים

$$a_n := (1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n})^{(n^{(-1)^n})}$$

הזוגיים

$$a_{2n} = (1 + \frac{-1}{2n})^{2n} = (1 + \frac{1}{-2 \cdot n})^{2n} \to e^{-1}$$

האי זוגיים

$$a_{2n-1} = (1 + \frac{1}{2n-1})^{(\frac{1}{2n-1})} \to 1$$

ולכן הגבול העליון הוא 1 והתחתון הוא e^{-1}.

שאלה 5

א. יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת נקודה a, כך ש $g(x)$ אינה רציפה ב a אך $f(x)$ וכן $f(x)\cdot g(x)$ שתיהן רציפות ב a.

מהו הערך $f(a)$?

ב. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$ ומקיימת $f(0)=0$. נתון שהנגזרת הימנית $f'_+(0)$ קיימת.

מצא את הגבול $\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}$.

סעיף א

נניח בשלילה $f(a)\neq 0$ כעת, ממשפט מההרצאה, מנת רציפות רציפה ומתקיים

$$lim_{x\to a} g(x) = lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)} = \frac{f(a)\cdot g(a)}{f(a)} = g(a)$$

בסתירה לכך שאינה רציפה

סעיף ב

$$lim_{x\to 0^+} x^{f(x)} = lim_{x\to 0^+} e^{f(x)\cdot ln(x)} = lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot ln(x)\cdot \frac{f(x)}{x}} = e^0 = 1$$

המעבר האחרון נובע מהטענה הבאה

נראה כי $lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x)\cdot \frac{f(x)}{x} = 0$, נראה ששתי הפונקציות הבאות מתכנסות, הראשונה לאפס וזה יוכיח

$$lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x) = lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{1/x} = lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

ומצד שני

$$lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0^+)$$

כעת המכפלה שלהן חוקית כמכפלת מתכנסת ומתכנסת למכפלתן, אפס, וסיימנו.