פתרון תרגיל 8 טופולוגיה תשע"ז

1. אם המרחב X טריויאלי אז X היא הקבוצה הפתוחה הלא ריקה היחידה ולכן בוודאי ש $\mathcal{B} = \{X\}$ בסיס. מצד שני נניח ש $\mathcal{B} = \{B\}$ בסיס של X. X בעצמה קבוצה פתוחה וצריכה להיות איחוד של אברים מהבסיס ולכן בהכרח $B = X$. לכן אין עוד קבוצות פתוחות חוץ מ X וזו טופולוגיה טריויאלית.

2. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של מרחב דיסקרטי. כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה פתוחה ולכן אמור להיות איחוד של אברים מהבסיס. אבל אם B קבוצה לא ריקה המקיימת $B \subseteq \{x\}$ אז בהכרח $B = \{x\}$ ולכן כל היחידונים הם איברים בבסיס. מצד שני נניח שכל היחידונים הם אברים ב $\mathcal{B}$, אז בוודאי כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מגודל 1 ולכן כל קבוצה היא איחוד של אברים מ $\mathcal{B}$ ולכן זה באמת בסיס.

3. אם f רציפה אז מכיוון ש B פתוחה בוודאי מתקיים ש $f^{-1}(B)$ פתוחה. מצד שני, נניח כי $f^{-1}(B)$ פתוחה עבור כל $B \in \mathcal{B}$. כעת, תהי P קבוצה פתוחה כלשהיא. אז ידוע כי $P = \bigcup_{i \in I} B_i$ לפי הגדרת בסיס. ולכן

$$f^{-1}(P) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

לפי הנתון כל $f^{-1}(B_i)$ הוא פתוח ולכן גם האיחוד $f^{-1}(P)$ פתוח כנדרש ו f רציפה.

4. (א) דניקח כדוגמא את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית. ברור שהריבועים הפתוחים $(0,1) \times (0,1)$ו$(2,3) \times (2,3)$נמצאים ב $\mathcal{B}$.
אם $(X \times Y, \mathcal{B})$ באמת היה טופולוגיה אז היה מתקיים

$$(0,1) \times (0,1) \cup (2,3) \times (2,3) \in \mathcal{B}$$

אבל זה דווקא לא נכון. מפני שאם

$$(0,1) \times (0,1) \cup (2,3) \times (2,3) = A_1 \times A_2$$

כאשר A_1, A_2 פתוחות ב $\mathbb{R}$ אז בהכרח יתקיים ש

$$(0,1) \cup (2,3) \subseteq A_1, A_2$$

ואז גם יתקיים

$$(0,1) \times (2,3) \subseteq A_1 \times A_2$$

אבל

$$(0,1) \times (2,3) \subsetneq (0,1) \times (0,1) \cup (2,3) \times (2,3)$$

בסתירה ולכן זו לא טופולוגיה.

(ב) נראה שמתקיימות הדרישות לכך שקבוצה כלשהיא היא בסיס. קודם כל בוודאי ש $X \times Y$ היא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$ כי $X \times Y \in \mathcal{B}$ בעצמה. כעת אם $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{B}$, צריך להוכיח כי החיתוך שלהם הוא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$. ואכן קל לראות כי

$$A_1 \times B_1 \cap A_2 \times B_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

כמובן ש $A_1 \cap A_2$ ו $B_1 \cap B_2$ הן קבוצות פתוחות (ב X וב Y בהתאמה) בתור חיתוך פתוחות ולכן $A_1 \times B_1 \cap A_2 \times B_2$ הוא ממש איבר ב $\mathcal{B}$ בפרט זה איחוד של קבוצות מ $\mathcal{B}$. וקיבלנו מה שרצינו.

5. (א) יהי $X \supseteq Y$ תת מרחב. ראשית נשים לב ש אם $\mathcal{B} = \{B_i\}$ בסיס עבור X אז $\{B_i \cap Y\}$ הוא בסיס עבור Y. זה מפני שכל הקבוצות $B_i \cap Y$ הן אכן פתוחות ב Y. ואם P פתוחה ב Y (כלומר $P = A \cap Y$ עבור A פתוחה ב X) אז $A = \cup B_i$ ולכן $P = A \cap Y = (\cup B_i) \cap Y = \cup (B_i \cap Y)$ איחוד של אברים מהבסיס כנדרש.
כעת, אם ל X יש בסיס בן מניה $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ אז $\{B_i \cap Y\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה עבור Y ולכן Y גם כן מרחב B_2.

(ב) יש ל X בסיס בן מניה $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. כל קבוצה פתוחה P אפשר לכתוב כאיחוד של איברים מהבסיס.

$$O = \bigcup_{i \in I_P} B_i$$

כאשר $I_O \subseteq \mathbb{N}$. (כמובן, הבחירה של קבוצת האינדקסים I_O לא יחידה אבל אפשר לבחור קבוצה כלשהיא) נגדיר פונקציה

$$f : \tau \to P(\mathbb{N})$$

(כאן $P(\mathbb{N})$ זאת קבוצת החזקה) לפי

$$f(O) = I_O$$

נשים לב ש f חד חד ערכית כי אם

$$f(O_1) = f(O_2)$$

כלומר

$$I_{O_1} = I_{O_2}$$

אז

$$O_1 = \bigcup_{i \in I_{O_1}} B_i = \bigcup_{i \in I_{O_2}} B_i = O_2$$

ולכן העוצמות מקיימות ש

$$|\tau| \leq |P(\mathbb{N})| = \aleph$$

כנדרש.

(ג) יהי $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי של קבוצות פתוחות ויהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. לכל $x \in U$, קיים $B_x \in \mathcal{B}$ כך ש $x \in B_x \subseteq U$ (לפי הגדרת בסיס). ברור ש $\{B_x\}_{x\in X}$ הינו כיסוי עבור X. למרות ש X יכולה להיות לא בת מניה, הכיסוי הזה חייב להיות בן מניה כי הוא מכיל רק אברים מ $\mathcal{B}$שהיא קבוצה בת מניה. לכן קיימת איזה קבוצה בת מניה $Y \subseteq X$ כך ש $\{B_y\}_{y\in Y}$ הוא גם כיסוי עבור X. כעת, לפי הבניה שלנו, ניתן לראות שלכל $y \in Y$ יש איזה $U \in \mathcal{U}$ כך ש $B_y \subseteq U$. יכולות להיות כמה קבוצות כאלה, אבל יש לפחות אחת. נבחר אחת מהן ונסמן אותה U_y. כעת האוסף $\{U_y\}_{y\in Y}$ שהוא תת קבוצה של $\mathcal{U}$ הוא וודאי בן מניה (מאונדקס ע"י Y שהיא קבוצה בת מניה) והוא מכסה את X כי

$$X = \bigcup_{x\in X} B_X \subseteq \bigcup_{x\in X} U_X$$

ולכן זה תת כיסוי בן מניה כנדרש.

(ד) יהי $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה של X. היות שגם $\mathcal{B}$ בסיס. כל C_i הוא איחוד איברים מ $\mathcal{B}$. נניח שלכל $i \in \mathbb{N}$ יש קבוצת אינדקסים J_i כך ש

$$\bigcup_{j\in J_i} B_j = C_i$$

לפי שאלה 4 C_i עצמו הוא גם מרחב מניה שניה בתור תת מרחב. לכן, לפי הסעיף הקודם, לכל כיסוי יש תת כיסוי בן מניה. לכן יש קבוצת אינדקסים בת מניה

$$K_i \subseteq J_i$$

כך ש

$$\bigcup_{j\in K_i} B_j = C_i$$

נשים לב ש $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ היא קבוצה בת מניה בתור איחוד בן מניה של בנות מניה.

לכן הקבוצה $\{B_j \mid j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\}$ היא גם בת מניה. אבל קבוצה זו היא גם בסיס כי כל איבר מהבסיס C_i הוא איחוד של איברים מקבוצה זו. ובזה סיימנו.

(ה) יהי $\mathcal{B}$ בסיס עבור X. ניקח נקודה $x \in X$ כלשהיא. לפי הנתון, יש לה בסיס סביבות בן מניה $\{V_i^x\}_{i=1}^{\infty}$. כל V_i^x היא סביבה ולכן מכילה קבוצה פתוחה ולכן קיים $B_i^x \in \mathcal{B}$ איבר כלשהוא מהבסיס כך ש $x \in B_i^x \subseteq V_i^x$. כעת נסתכל על הקבוצה $\{B_i^x \mid i \in \mathbb{N},\, x \in X\}$. זו קבוצה בת מניה כי איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה. נרצה להוכיח שהיא בסיס. ואכן לכל U פתוחה כלשהיא ו $x \in U$ קיימת סביבה V_i^x כך ש $x \in V_i^x \subseteq U$ (הלא זה בסיס סביבות) ואז לפי מה שראינו

$$x \in B_i^x \subseteq U$$

כלומר הקבוצה $\{B_i^x \mid i \in \mathbb{N},\, x \in X\}$ אכן בסיס.

6. נסמן את טופולוגיית המכפלה ב־τ_π. נגדיר מטריקה על X באופן הבא:

$$d_{\max}\left(x,y\right)=\max\left\{d_i\left(x_i,y_i\right)|1\leq i\leq n\right\}$$

כאשר d_i המטריקה של X_i, $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right),y=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ (בדקו שזו אכן מטריקה).
המטריקה $d_{\max}$ משרה טופולוגיה $\tau_{\max}$. נראה שמתקיים: $\tau_\pi=\tau_{\max}$.
לצד אחד, נראה שפונקציות ההטלה: $p_i:\left(X,d_{\max}\right)\to\left(X_i,d_i\right)$ רציפות.
אם כן, יהי $x\in X$ ויהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל:

$$d_i\left(p_i\left(x\right),p_i\left(y\right)\right)=d_i\left(x_i,y_i\right)\leq\max\left\{d_i\left(x_i,y_i\right)|1\leq i\leq n\right\}=d_{\max}\left(x,y\right)<\delta=\varepsilon$$

ולכן $d_i\left(p_i\left(x\right),p_i\left(y\right)\right)<\varepsilon$, והפונקציות p_i אכן רציפות.
הטופולוגיה τ_π היא החלשה ביותר בה ההטלות רציפות, ולכן $\tau_\pi\subseteq\tau_{\max}$.
לצד השני, נשים לב לעובדה הבאה:

$$y\in B_{d_{\max}}\left(x,\varepsilon\right)\iff d_{\max}\left(x,y\right)<\varepsilon\iff\max\left\{d_i\left(x_i,y_i\right)|1\leq i\leq n\right\}<\varepsilon$$

$$\iff\forall i,d_i\left(x_i,y_i\right)<\varepsilon\iff\forall i,y_i\in B_{d_i}\left(x_i,\varepsilon\right)\iff y\in\prod B_{d_i}\left(x_i,\varepsilon\right)$$

כלומר, כל כדור במטריקה $d_{\max}$ אפשר להציג כמכפלת כדורים מהמטריקות d_i.
נסמן: $C_{\max}=\left\{B_{d_{\max}}\left(x,\varepsilon\right):x\in X,\varepsilon>0\right\}$. נסמן גם: $C_\pi=\left\{\prod B_{d_i}\left(x_i,\varepsilon\right)|x_i\in X_i,\varepsilon>0\right\}$.
קיבלנו ש: $C_{\max}\subseteq C_\pi$.
$C_{\max}$ הוא בסיס של $\tau_{\max}$, C_π הוא בסיס של τ_π ולכן $\tau_{\max}\subseteq\tau_\pi$.
בסה"כ, $\tau_\pi=\tau_{\max}$ ולכן מרחב המכפלה (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי.

7. לפי התרגיל הקודם, $X\times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה $d_{\max}$.
נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה $d_{\max}$ ולכן גם רציפה לפי τ_π.
תהי $\left(x,y\right)\in X\times X$ ויהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}\left(\left(x,y\right),\left(z,w\right)\right)<\delta$ אז:

$$\left|d\left(x,y\right)-d\left(z,w\right)\right|\leq d\left(x,y\right)+d\left(z,w\right)<\delta+\delta=\varepsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר הראשון נובע מא"ש המשולש).

8. לצד אחד, נניח שהמרחב X האוסדורף. נניח בשלילה שהקבוצה Δ אינה סגורה, כלומר $cl\left(\Delta\right)\neq\Delta$.
מכיוון ש: $cl\left(\Delta\right)\supset\Delta$, נקבל שקיים $\left(x,y\right)\in cl\left(\Delta\right)$ כך ש: $\left(x,y\right)\notin\Delta$.
מהגדרת האלכסון, נקבל ש: $x\neq y$.
מכיוון ש־X האוסדורף, קיימות סביבות $x\in U,y\in V$ זרות.
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, נקבל ש־$U\times V$ היא סביבה (בסיסית) של $\left(x,y\right)$, אך מתקיים:

$$\left(U\times V\right)\cap\Delta=\emptyset$$

(אחרת, נקבל שקיים איבר משותף, ומהגדרת האלכסון פירוש הדבר ש־$\left(a,a\right)\in U\times V$, בסתירה לכך ש־$U,V$ זרות).
נקודה נמצאת בסגור אם ורק אם כל הסביבות (הבסיסיות) שלה נחתכות עם הקבוצה באופן לא ריק, ולכן $\left(x,y\right)\notin cl\left(\Delta\right)$ וסתירה.
לצד שני, נניח שהאלכסון סגור ב־$X\times X$. נניח בשלילה שהמרחב X אינו האוסדורף.
לפיכך, קיימות $x,y\in X$ שונות כך שלכל שתי סביבות $x\in U,y\in V$, מתקיים

$U \cap V \neq \emptyset$.

לכן, לכל סביבה (בסיסית) $(x,y) \in U \times V$ מתקיים $(U \times V) \cap \Delta \neq \emptyset$ (כי הסביבות לא זרות, ולכן תמיד קיים $a \in U \cap V$, ואז $(a,a) \in (U \times V) \cap \Delta$).

זה נכון לכל סביבה (בסיסית), ולכן $(x,y) \in cl(\Delta)$.

לפיכך, $cl(\Delta) \neq \Delta$ ולכן Δ לא קבוצה סגורה וסתירה.

9. נשתמש בהגדרת הבסיס של טופולוגיית המכפלה.

(א) מהגדרת המכפלה הקרטזית, מתקיים:

$$(A \times B)^c = (X \times (Y \backslash B)) \cup ((X \backslash A) \times Y)$$

הקבוצות $X, X \backslash A \subseteq X, Y, Y \backslash B \subseteq Y$ פתוחות (כי A, B סגורות), ומהגדרת טופולוגיית המכפלה הקבוצות $(X \times (Y \backslash B)), ((X \backslash A) \times Y) \subseteq X \times Y$ פתוחות.

לכן $(A \times B)^c \subseteq X \times Y$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות), ולכן $A \times B$ סגורה.

(ב) לצד אחד, $cl(A) \subseteq X, cl(B) \subseteq Y$ סגורות.

לפי הסעיף הקודם, גם $cl(A) \times cl(B)$ סגורה.

$A \subseteq cl(A), B \subseteq cl(B)$ ולכן $A \times B \subseteq cl(A) \times cl(B)$.

ממינימליות הסגור נקבל:

$$cl(A \times B) \subseteq cl(A) \times cl(B)$$

לצד שני, תהי $(a,b) \in cl(A) \times cl(B)$.

מהגדרת סגור, לכל שתי סביבות $a \in U \subseteq X, b \in V \subseteq Y$ מתקיים: $U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset$.

לכן, לכל סביבה (בסיסית) $U \times V$ של (a,b) מתקיים: $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$.

לכן, $(a,b) \in cl(A \times B)$, כלומר $cl(A \times B) \supseteq cl(A) \times cl(B)$.

(ג) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ צפופות ובנות מניה.

מהסעיף הקודם:

$$cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$$

כלומר:

$$cl(A \times B) = X \times Y$$

ולכן $A \times B \subseteq X \times Y$ צפופה.

מכיוון שהקבוצות A, B הן בנות מניה גם $A \times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת. יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח).

לכן $X \times Y$ ספרבילי.

10. אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה.

אם כן, יהי $\prod \{x_i\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j} = X_j$ אם $i \neq j$ ו-$Y_{i,j} = X_j \backslash \{x_j\}$ אם $i \neq j$.

בכל מקרה, $Y_{i,j} \subseteq X_j$ פתוחה (אם $i = j$, מכיוון ש-X_j הוא T_1 הנקודון $\{x_j\} \subseteq X_j$ הוא סגור ולכן $X \backslash \{x_j\}$ פתוחה).

מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j Y_{i,j} \subseteq \prod_j X_j$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות).

לכן $\prod \{x_i\}$ סגורה.

11. יהי $a \in X$, ונתבונן בקבוצה $X \times \{a\} \subseteq X \times X$.
משאלה 4, $X \times \{a\}$ סגורה לפי טופולוגיית המכפלה.
מאידך גיסא, בטופולוגיה הקו-סופית הקבוצה $X \times \{a\}$ אינה סגורה (כי היא אינסופית ולא שווה למרחב כולו).
לכן τ_π היא לא הטופולוגיה הקו-סופית.

12. נגדיר פונקציה $f : X \times Y \to Y \times X$ על ידי:

$$f(x, y) = (y, x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1 \circ f : X \times Y \to Y$$

שווה לפונקציה $p_2 : X \times Y \to Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2 \circ f : X \times Y \to X$$

שווה לפונקציה $p_1 : X \times Y \to X$.
לכן הפונקציות $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה.
קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1} : Y \times X \to X \times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y, x) = (x, y)$.
f^{-1} רציפה (בדומה ל-f) ולכן f הומיאומורפיזם.