משוואות דיפרנציאליות חלקיות

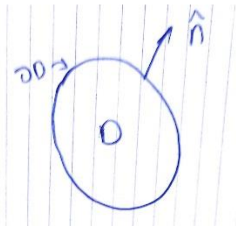
תרגול 15

25/01/2018

משפט הדיברגנץ

D תחום חסום וסגור בעל שפה חלקה למדי ∂D, ותהי $\vec{F}$ פו' וקטורית $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, אזי:

$$\iint_D div(\vec{F})\, dxdy = \oint_{\partial D} \langle \vec{F}, \hat{n} \rangle\, dr$$



נוסחת גרין I:

$$\iint_D u\Delta v\, dxdy = \oint_{\partial D} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dr - \iint_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dxdy$$

הוכחה:

$\vec{F} = u\nabla v$ כאשר u פו' סקלרית:

$$\vec{F} = \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, u \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u\Delta v$$

נפעיל את משפט הדיברגנץ:

$$\iint_D div(u\nabla v)\, dxdy = \iint_D u\Delta v\, dxdy + \iint_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dxdy$$

לכן:

$$\oint_{\partial D} \langle u\Delta v, \hat{n} \rangle\, dr = \iint_D u\Delta v\, dxdy + \iint_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dxdy$$

$$\oint_{\partial D} u \underbrace{\langle \Delta v, \hat{n} \rangle}_{\frac{\partial v}{\partial n}}\, dr = \iint_D u\Delta v\, dxdy + \iint_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dxdy$$

ונקבל:

$$\iint_D u\Delta v\, dxdy = \oint_{\partial D} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dr - \iint_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dxdy$$

וזוהי אכן נוסחת גרין הראשונה.

■

הערה:

נחליף את התפקידים של u ו – v בנוסחת גרין הראשונה ונכתוב את שני הצורות אחד ליד השני:

$$\iint_D u\Delta v\, dxdy = \oint_{\partial D} u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\, dr - \iint_D \langle\nabla u,\nabla v\rangle\, dxdy$$

$$\iint_D v\Delta u\, dxdy = \oint_{\partial D} v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\, dr - \iint_D \langle\nabla u,\nabla v\rangle\, dxdy$$

נחסר ביניהם לקבל את נוסחת גרין ה – $\mathbb{I}$:

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy = \oint_{\partial D}\left(v\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\right) dr$$

הערה:

זהות גרין משתמשים בדר"כ כדי להראות יחידות לבעיה רב מימדית ביחד עם אינטגרל אנרגיה.

שימוש נוסף לזהות גרין הוא תנאי הכרחי לבעיית דריכלה לאופרטור לפלס עם תנאי נוימן:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y)\in D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}} = f(x,y), & (x,y)\in\partial D \end{cases}$$

<u>תנאי שפה רובין:</u>

$$u(x,y,t) + k\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad (x,y)\in\partial D$$

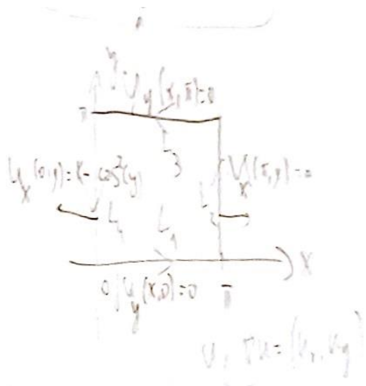
כדי להראות את התנאי ההכרחי לבעיית אופרטור לפלס עם תנאי שפה נוימן ניעזר בזהות גרין ה – $\mathbb{I}$ ונבחר $v=1$ ונקבל:

$$\boxed{0 = \oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}\, dr}$$

תרגיל:

נסתכל על משוואת לפלס הבאה במלבן:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0, & 0<x,y<\pi \\ u_x(0,y) = k-\cos^2(y), & 0\le y\le\pi \\ u_x(\pi,y) = 0, & 0\le y\le\pi \\ u_y(x,0) = 0, & 0\le x\le\pi \\ u_y(x,\pi) = 0, & 0\le x\le\pi \end{cases}$$



א) עבור איזה ערך של k קיים פתרון לבעיה?

ב) עבור k שמצאת, מצא את $u(x,y)$.

פתרון:

א) נסמן את התחום של המלבן ב – D. נבדוק את התנאי שהצגנו קודם לכן:

$$0 = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,dr = \oint_{L_1} \frac{\partial u}{\partial n}\,dr + \oint_{L_2} \frac{\partial u}{\partial n}\,dr + \oint_{L_3} \frac{\partial u}{\partial n}\,dr + \oint_{L_4} \frac{\partial u}{\partial n}\,dr$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, \hat{n} \rangle = \langle (u_x, u_y), \hat{n} \rangle$$

$$0 = \oint_{L_1} \langle (u_x, u_y), (0,-1) \rangle dr + \oint_{L_2} \langle (u_x, u_y), (1,0) \rangle\,dr + \oint_{L_3} \langle (u_x, u_y), (0,1) \rangle\,dr + \oint_{L_4} \langle (u_x, u_y), (-1,0) \rangle\,dr$$

$$0 = \oint_{L_1} -u_y\,dr + \oint_{L_2} u_x\,dr + \oint_{L_3} u_y\,dr - \oint_{L_4} u_x\,dr$$

נחשב כל אינטגרל בנפרד:

<u>על L_1:</u>

מתקיים ש:

$$r = x$$

$$dr = dx$$

ולכן:

$$\int_0^{\pi} -u_y(x,0)\,dx = 0$$

<u>על L_2:</u>

מתקיים ש:

$$r = y$$

$$dr = dy$$

ולכן:

$$\int_0^\pi u_x(\pi, y)\, dy = 0$$

<u>על L_3:</u>

מתקיים ש:

$$r = x$$

$$dr = dx$$

ולכן:

$$\int_\pi^0 u_y(x, \pi)\, dx = 0$$

<u>על L_4:</u>

מתקיים ש:

$$r = y$$

$$dr = dy$$

ולכן:

$$\int_\pi^0 -u_x(0, y)\, dy = \int_0^\pi k - \cos^2(y)\, dy$$

נחבר הכל ונקבל את המשוואה:

$$\int_0^\pi k - \cos^2(y)\, dy = 0$$

נחשב את האינטגרל לפי הזהות $\cos^2(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y)$:

$$\int_0^\pi \left[k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2y)\right] dy = \left[ky - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)\right]_0^\pi = k\pi - \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow k\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$$

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

ב) נציב את ה – k שמצאנו:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_y=0, \qquad 0<x,y<\pi \\ u_x(0,y)=\frac{1}{2}-\cos^2(y)=\frac{\cos(2y)}{2}, \qquad 0\le y\le\pi \\ u_x(\pi,y)=0, \qquad 0\le y\le\pi \\ u_y(x,0)=0, \qquad 0\le x\le\pi \\ u_y(x,\pi)=0, \qquad 0\le x\le\pi \end{cases}$$

נשים לב כי $u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0$ יהיו תנאי השפה שלנו ושני התנאים האחרים יהיו תנאי ההתחלה.

נבצע הפרדת משתנים:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$u_y(x,y)=X(x)Y'(y)$$

נציב את תנאי השפה:

$$0=u_y(x,0)=\underbrace{X(x)}_{\neq 0}Y'(0)=0\Rightarrow Y'(0)=0$$

$$0=u_y(x,\pi)=\underbrace{X(x)}_{\neq 0}Y'(\pi)=0\Rightarrow Y'(0)=0$$

נציב במד"ח:

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

יחד עם תנאי השפה (נוימן):

$$Y'(0)=Y'(\pi)=0$$

נקבל מהפרדת המשתנים ש:

$$\boxed{\lambda_n=n^2, \qquad n\ge 0}$$

$$\boxed{Y_n(y)=C_n\cos(ny)}$$

(נשים לב כי $\lambda=0$ לא נותן פתרון טריוויאלי).

נחזור למשוואה עבור X:

$$-\frac{X_n''}{X_n}=-n^2$$

צריך להפריד עבור $n=0$:

$$-\frac{X_0''(x)}{X_0(x)}=0\Rightarrow X_0''(x)=0\Rightarrow \boxed{X_0(x)=a_0x+b}$$

עבור $n \neq 0$:

$$-\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -n^2$$

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - n^2 = 0$$

$$k = \pm n$$

לכן:

$$\boxed{X_n(x) = a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}}$$

קיבלנו ש:

$$u_0(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = (a_0 x + b_0)c_0 = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}x$$

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n \cos(ny)\,[a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}]$$
$$= \cos(ny)\,[A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}]$$

קיבלנו:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ny)\,[A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}]}$$

נרצה להציב תנאי התחלה:

$$u_x(x,y) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ny)\,[nA_n e^{nx} - nB_n e^{-nx}]$$

$$-\frac{1}{2}\cos(2y) = u_x(0,y) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ny)\,[nA_n - nB_n]$$

<u>מהשוואת מקדמים:</u>

עבור $n = 2$:

$$2A_2 - 2B_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A_2 - B_2 = -\frac{1}{4}}$$

עבור $n = 1$ וגם $n \geq 2$:

$$nA_n - nB_n = 0$$

$$\boxed{A_n - B_n = 0}$$

$$\boxed{B_0 = 0}$$

מתנאי התחלה שני:

$$0 = u_x(\pi, y) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ny)\left[nA_n e^{n\pi} - nB_n e^{-n\pi}\right]$$

מקבלים:

$$B_0 = 0$$

$$\forall n \geq 1 :\ nA_n e^{n\pi} - nB_n e^{-n\pi} = 0$$

$$\boxed{A_n e^{n\pi} - B_n e^{-n\pi} = 0}$$

נקבל:

$$n = 2 : \begin{cases} A_2 - B_2 = -\frac{1}{4} \\ A_2 e^{2\pi} - B_2 e^{-2\pi} = 0 \end{cases}$$

$$n \geq 3\ , n = 1 :\ \begin{cases} A_n - B_n = 0 \\ A_n e^{n\pi} - B_n e^{-n\pi} = 0 \end{cases}$$

עבור המערכת השנייה נקבל $A_n = B_n = 0$ (ניתן להציב או לחשב דטרמיננטה).

נשתמש בכלל קרמר עבור המערכת הראשונה (גם פה אפשר לעשות הצבות):

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & -e^{-2\pi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ e^{2\pi} & -e^{-2\pi} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2\pi}}{-2\sinh(2\pi)} = \frac{e^{-2\pi}}{-8\sinh(2\pi)}$$

בדומה:

$$B_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ e^{2\pi} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ e^{2\pi} & -e^{-2\pi} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{4}e^{2\pi}}{-2\sinh(2\pi)} = \frac{e^{2\pi}}{-8\sinh(2\pi)}$$

<u>נחזור לטור המקורי:</u>

$$\boxed{u(x,y) = \frac{A_0}{2} + \cos(2y)\left[\frac{e^{-2\pi}}{-8\sinh(2\pi)}e^{2x} - \frac{e^{2\pi}}{8\sinh(2\pi)}e^{-2x}\right]}$$

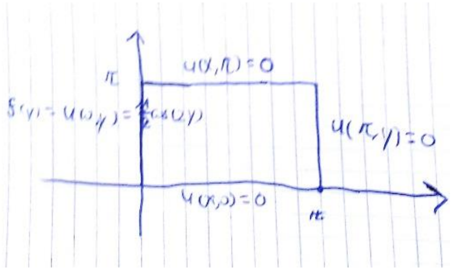
■

<u>משפט המקסימום החלש עבור פו' הרמונית:</u> תהי u פו' הרמונית בתחום D <u>חסום וסגור</u> !

אזי u מקבלת את המינימום ואת המקסימום על השפה ∂D.

<u>דוגמה:</u>

בתרגיל הקודם שלנו, נשאל מהו הערך המינימלי ומהו הערך המקסימלי?



$$f(y) = \frac{1}{2}\cos(2y)\,, \qquad 0 \le y \le \pi$$

$$f'(y) = -\sin(2y)$$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\sin(2y) = 0$$

$$2y = n\pi$$

$$y = \frac{n\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור התחום שלנו נקבל שהערכים האפשריים הם (עבור $n = 0,1,2$):

$$y = 0\,, \frac{\pi}{2}, \pi$$

נבדוק האם הם מקסימום או מינימום:

$$f''(y) = 2\cos(2y)$$

$$f''(0) = 2\cos(0) = 2 > 0 \Rightarrow \min\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

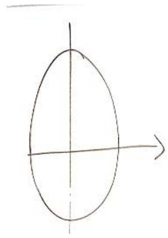
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) = -2 < 0 \Rightarrow \max\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f''(\pi) = 2\cos(2\pi) = 2 > 0 \Rightarrow \min\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$$

ומצאנו.

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ u(x,y) = y, & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$u(2,\theta) = 2\sin(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$h(\theta) = 2\sin(\theta)$$

תחקרו ותמצאו ערך מקסימלי ומינימלי...

<u>תרגיל (תזכורת):</u>

<u>חצי מיתר אינסופי:</u>

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x < \infty \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

א) מהו תנאי תואמות בהינתן ש - $f \in C^2([0,\infty))$, $g \in C^1([0,\infty))$.

ב) מצא פתרון לבעיה.

<u>פתרון:</u>

א) נקבל ש:

$$\boxed{f(0) = g(0) = f''(0) = 0}$$

ב) לפי תנאי התאימות מקודם, נבצע ל $f-$ ו $g-$ הרחבה **אי זוגית**:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \ge 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \ge 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

<u>נגדיר:</u> $\tilde{u}$ היא המד"ח של u על כל $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0, & 0 < x < \infty \\ \tilde{u}(x,0) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ \tilde{u}_t(x,0) = 0, & 0 \le x < \infty \\ \tilde{u}(0,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

נחלק לשני מקרים:

1) $0 \le x - t < x + t$.

2) $x - t < 0 \le x + t$.

נשתמש בנוסחת דלאמבר:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{g}(s)\,ds$$

<u>מקרה I:</u>

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$$

<u>מקרה $\mathbb{I}$:</u>

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_{x-t}^{0} -g(-s)\,ds + \int_{0}^{x+t} g(s)\,ds\right]$$

נצבע החלפת משתנים:

$$r = -s \Rightarrow dr = -ds$$

ונקבל:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \frac{f(x+t) - f(t-x)}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_{t-x}^{0} g(r)\,dr + \int_{0}^{x+t} g(s)\,ds\right] \\ &= \frac{f(x+t) - f(t-x)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} g(s)\,ds\end{aligned}$$

לכן:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds\,, & x - t \ge 0 \\ \dfrac{f(x+t) - f(t-x)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{x+t} g(s)\,ds\,, & x - t < 0 \end{cases}$$

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty \\ u(x,0) = x + 2, & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x < \infty \\ u(0,t) = 2, & t \ge 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי תנאי השפה הוא לא הומוגני ולכן נגדיר $u = v + 2$ ונפתור את:

$$v = u - 2$$

נגדיר את הבעיה על v:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = x, & f(x) \\ v_t(x,0) = 0, & g(x) \\ v(0,t) = 0, & h(t) \end{cases}$$

את הבעיה על v נפתור כרגיל.

<u>תנאי תואמות:</u>

$$\begin{cases} f(0) = h(0) = 0 \\ g(0) = h'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$$

מחישוב u מהתזכורת, יתקיים ש:

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x+t+x-t}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} 0\, ds = x, & x - t \ge 0 \\ \dfrac{x+t-(t-x)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{x+t} 0\, ds = x, & x - t < 0 \end{cases}$$

וסיימנו.

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח:

$$u_x + x^2 u_y = u$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא:

א) $u(0,y) = 1$.

ב) $u(x,0) = 1$.

<u>פתרון:</u>

א) נפתור עם שיטת קווים אופיינים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 \\ \frac{du}{dt} = u \end{cases}$$

נפתור כל משוואה:

$$x(t,s) = t + f_1(s)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(t + f_1(s)\right)^2$$

$$y = \frac{\left(t + f_1(s)\right)^3}{3} + f_2(s)$$

וכן:

$$\frac{du}{dt} = u$$

$$\frac{du}{u} = dt$$

$$\int \frac{du}{u} = \int dt$$

$$\ln(u) = t + \widetilde{f_3}(s)$$

$$u = f_3(s)e^t$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} x(t,s) = t + f_1(s) \\ y(t,s) = \frac{\left(t + f_1(s)\right)^3}{3} + f_2(s) \\ u(t,s) = f_3(s)e^t \end{cases}$$

נקבל שהקו ההתחלתי הוא (כי $u(0,y) = 1$):

$$\Gamma = \{x(0,s), y(0,s), u(0,s)\} = \{(0,s,1)\}$$

לכן:

$$0 = x(0,s) = f_1(s)$$

$$s = y(0,s) = \frac{\left(f_1(s)\right)^3}{3} + f_2(s) \Rightarrow f_2(s) = s$$

$$1 = u(0,s) = f_3(s) \cdot 1 \Rightarrow f_3(s) = 1$$

לכן המשטח האופייני הוא:

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = \dfrac{t^3}{3} + s \\ u(t,s) = e^t \end{cases}$$

נבדוק את תנאי החיתוך:

$$|J|_{t=0} = \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{t=0} = 1 \neq 0$$

לכן מהמשפט, באופן מקומי יש מקום (לא בהכרח בכל $\mathbb{R}$).

נוכל לחזור למשתנים x, y:

$$\boxed{t = x}$$

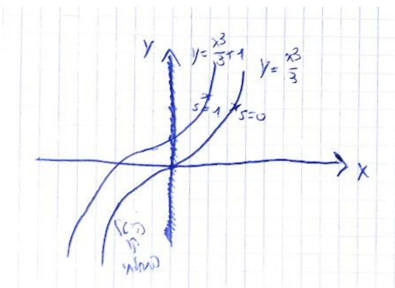
$$\Rightarrow s + \frac{x^3}{3} = y$$

$$\boxed{s = y - \frac{x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x$$

היטל קו אופייני במישור xy: $y = \frac{x^3}{3} + s$.

היטל קו התחלתי: $(0,s)$, משמע ציר ה – y!



ב) כעת נבצע אותו דבר בהתחלתה, אבל הקו ההתחלתי כעת שונה:

$$\Gamma = \{x(0,s), y(0,s), u(0,s)\} = \{(s, 0, 1)\}$$

כעת:

$$s = x(0,s) = f_1(s)$$

$$0 = y(0,s) = \frac{s^3}{3} + f_2(s) \Rightarrow f_2(s) = -\frac{s^3}{3}$$

$$1 = u(0,s) = f_3(s)$$

נקבל:

$$\begin{cases} x(t,s) = t + s \\ y(t,s) = \dfrac{(t+s)^3}{3} - \dfrac{s^3}{3} \\ u(t,s) = e^t \end{cases}$$

נבדוק את תנאי החיתוך:

$$|J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & x^2(0,s) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -s^2 \neq 0$$

תנאי החיתוך מתקיים כש - $s \neq 0$ ונוכל לחזור למשתנים המקוריים x, y והפתרון הוא רק מקומי!

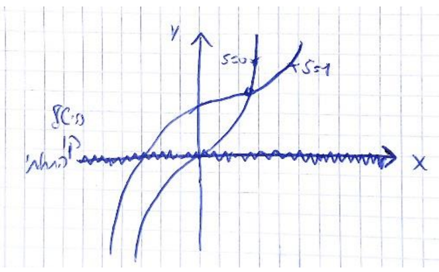
ב - $s = 0$ נצטרך לבדוק.

היטל קו אופייני במישור xy:

$$x = t + s$$

$$\boxed{y = \frac{x^3 - s^3}{3}}$$

היטל קו התחלתי: $(0, s)$.



ולכן ב - $s = 0$ אין פתרון. הבעיה נובעת מכך שהיטל קווים אופיינים נחתכים בכל סביבה של הראשית.

■